Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Funciones de Lyapunov y semigrupos tipo-gradiente

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Maruja Yolanda GAVILÁN GONZALES

ASESOR

Dr. Victor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Gavilán, M. (2019). *Funciones de Lyapunov y semigrupos tipo-gradiente*. Tesis para optar grado de Magíster en Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Metadata complementaria

- Código ORCID de Maruja Yolanda Gavilán Gonzales (autora):
  https://orcid.org/0000-0002-6230-0899
- Código ORCID de Victor Rafael Cabanillas Zannini (asesor):
  https://orcid.org/0000-0003-2325-8824

- Grupos de Investigación:
  Matemática Computacional y CTS Lima Norte

- Institución que financia la Investigación:
  Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

- Ubicación geográfica donde se desarrollo la investigación:
  UNMSM, Av. Universitaria s/n. cruce con Av. Venezuela cdra. 34, Lima. (coordenadas: $12^0\ 03'\ 30''$ S $77^0\ 05'\ 00''$ O)
- Rango de años: 2012-2019

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS DE GRADO ACADEMICO DE MAGISTER

Siendo las 15:02 horas del día jueves 19 de diciembre del dos mil diecinueve, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Renato Mario Benazic Tome e integrado por los siguientes miembros, Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho (Jurado Evaluador), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (Jurado Informante) y el Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini, como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «FUNCIONES DE LYAPUNOV Y SEMIGRUPOS TIPO-GRADIENTE» presentada por la Bachiller Maruja Yolanda Gavilán Gonzales para optar el Grado Académico de Magister en Matemática Pura.

Luego de la exposición de la graduanda, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales la Bachiller Maruja Yolanda Gavilán Gonzales respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando la Bachiller Maruja Yolanda Gavilán Gonzales aprobado con el calificativo de MUY BUENO (18)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de Magister en **Matemática Pura a la Bachiller Maruja Yolanda Gavilán Gonzales**.

Siendo las 16:05 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Alexandre Nolasco de Carvalho

Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
MIEMBRO

Dr. Renato Mario Benazic Tome
PRESIDENTE

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
MIEMBRO ASESOR

A Dios y a mi familia.

Agradecimientos

En este proceso formativo y personal quiero agradecer:

A Dios, por permitirme estar en este país llamado vida, por su infinito amor, la cuál hace que sonría ante los logros y sobre todo ante las adversidades.

A mi madre Maximiliana†, por sembrar en mí el amor a Dios, por enseñarme a luchar para lograr mis objetivos. Por ello madre mía, puedo decir tarea cumplida.

A mi padre Juan David, que me trasmite el valor de la perseverancia y el amor al trabajo con su día a día. Te agradezco padre por ser mi luz en momentos de oscuridad.

A mi esposo Roland por formar parte de mi vida, por su amor, paciencia y por ser mi director en mi vida personal y profesional. Te agradezco Roland por ser el muro que me cobija ante las inclemencias.

A toda mi familia que con amor y ternura me animaron a seguir este proyecto.

A mi asesor, el Dr. Rafael Cabanillas Zannini por sus comentarios y aportaciones para la culminación de la presente tesis.

A los miembros del jurado, al Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho, al Dr. Renato Benazic Tome y al Dr. Jorge Crisóstomo Parejas por su tiempo y dedicación para revisar y corregir la tesis. De manera especial al Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho, que participó en calidad de jurado externo desde la universidad de São Paulo, el cuál mostró además de ser un gran investigador, una gran persona. Gracias Dr. Alexandre; no solo por escribir [1], sino también por la paciencia ante las adversidades logísticas que surgieron antes de la sustentación.

Índice general

Índice de figuras

Resumen

FUNCIONES DE LYAPUNOV Y SEMIGRUPOS TIPO-GRADIENTE

Maruja Yolanda Gavilán Gonzales

2019

Asesor: Victor Rafael Cabanillas Zannini

Grado obtenido: Magister en Matemática Pura

Estudiamos los semigrupos definidos en un espacio métrico. Sin asumir la compacidad del espacio, presentamos la equivalencia entre: ser dinámicamente gradiente (tipo-gradiente), respecto a una familia invariante aislada y la existencia de una función de Lyapunov, generalizada. También estudiamos la regularidad de la función de Lyapunov. Vea [1].

Palabras Claves:

Funciones de Lyapunov y estabilidad; atractores, repulsores.

Atractores globales.

Teoría general, semigrupos no lineales, ecuaciones de evolución.

Abstract

We study the semigroups defined on a metric space. Without assuming the compactness on the space, we present the equivalence between: being dynamically gradient (gradient-type), with respect to an isolated invariant family and the existence of a generalized Lyapunov function. The regularity of Lyapunov function is also studied. See [1].

Key words and phrases. Lyapunov functions and stability; attractors, repellers. Global attractors. General theory, nonlinear semigroups, evolution equations

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 37B25; Secondary 35B41, 37L05.

Introducción

En la teoría de los sistemas dinámicos continuos (flujos, semiflujos, semigrupos, procesos de evolución, etc.) o discretos (difeomorfismos, endomorfismos, ecuaciones en diferencias, etc.), es útil estudiar la estructura geométrica de sus invariantes asociados, tales como: sus conjuntos límite, conjuntos recurrentes, las recurrencias por cadenas, atractores globales, entre otros. Al respecto, la lectura de [33] es una grata y amena introducción al tema, sin embargo en el presente trabajo se considera la investigación de los sistemas generados por ecuaciones diferenciales, cuyo análisis necesita de un espacio de dimensión infinita, como en los libros [17, 20, 38, 10]. El estudio se restringe a los sistemas que en algún sentido son disipativos; como, por ejemplo, aquellos que admiten un *atractor global: "un compacto invariante, que atrae a todos los acotados" [32, 18];* pues en éste contexto, es viable dar una rigurosa descripción de los procesos de evolución en cuestiones relacionadas al comportamiento asintótico [1, 23], la estabilidad [7], las aplicaciones [3, 12] y más [5, 39, 19].

Una estrategia para describir estos sistemas, consiste en asociarles una función auxiliar con alguna propiedad geométrica que permita describir no sólo el comportamiento dinámico del sistema, sino también la estructura del atractor global. Por ejemplo, una *función de Lyapunov* permite estudiar los sistemas gradientes y la estructura interna de su atractor global por su relación con el concepto de *conjunto inestable*. Así, uno de los objetivos de la tesis es construir una función de Lyapunov con un comportamiento útil en las soluciones.

Específicamente, los autores de [1] recuerdan que "*en [8] aparecen los semigrupos tipo–gradiente (no requieren la existencia de una función de Lyapunov, sólo algunas propiedades en la descomposición de Morse del atractor) como un concepto intermedio entre semigrupo gradiente (aquellos que admiten una función de Lyapunov) y los semigrupos que admiten un atractor tipo gradiente (un atractor que se caracteriza como la unión de los conjuntos inestables de sus conjuntos invariantes asociados)*". En este contexto, la presente tesis concluye con una descripción completa y precisa de las relaciones que existen entre estas tres clases de semigrupos, con la cual se establece la equivalencia de los semigrupos gradiente y tipo-gradiente, cumpliendo así con el otro objetivo de la tesis. Cabe mencionar que la demostración, sugerida por los autores de [1], utiliza las técnicas de [36] y se describen en el Capítulo 1. De este modo, no sólo se completan los detalles (Cap 2 y Cap. 3), sino también se divulga y difunde este importante resultado sobre la equivalencia de los sistemas, pues hasta donde se sabe, este enfoque no está escrito [16, 30, 24].

Este trabajo posee tres capítulos, cada uno de los cuales se describen a continuación. En el Capítulo 1 se introducen los conjuntos límite para un semigrupo y se presentan los conceptos de atracción y absorción. Inicialmente, se presentan dos teoremas que garantizan la existencia de un atractor global, el cual se caracteriza también como el conjunto de los elementos del espacio métrico para los cuales cada solución global es acotada. A continuación, se define no solo el concepto de *atractor local débil*, sino también su respectivo repulsor asociado, lo cual permite analizar el comportamiento de las soluciones globales que aparecen en un compacto invariante. Se introduce el concepto de *descomposición de Morse* de un conjunto invariante $S_{\mathcal{A}}$, en el sentido de [14], y se presenta una adecuada caracterización, con la cual se demostrará (proposición 2.2.14) que la definición1.4.7, tomada de [14, 36], es equivalente a la definición 2.10 de [1], cuando $S_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

La caracterización del teorema1.4.14 se enriquece en el segundo capítulo, donde sólo se trabaja en el atractor global, al comparar la dinámica del semigrupo con la dinámica restringida al atractor global, tal como se hace en [1] (teorema 2.2.11). Para hacer la diferencia y evitar cualquier equivocación, se habla de una *pareja atractor–repulsor* dentro de un compacto invariante como un concepto complementario al llamado *par atractor–repulsor* de un atractor global.

En el Capítulo 2 se demuestra la equivalencia entre los conceptos: *atractor local débil* y *atractor local* (proposición 2.2.9), la cual será de gran utilidad para analizar la existencia de los semigrupos gradientes, de los cuales existe una vasta literatura que describe sus propiedades geométrica, dinámica y topológica. Los semigrupos gradientes son aquellos que admiten una función de Lyapunov, la cual, entre otras propiedades, es útil para describir la dinámica. Por ejemplo, la función de Lyapunov de un semigrupo es constante en las órbitas de los elementos de cada conjunto límite. Con esto, en el teorema 2.1.14 se determina al atractor global cuando el semigrupo gradiente tiene un número finito de equilibrios, tal como se hace en [17]. Esta estrategia de estudio se extiende, en el importante teorema 2.3.8, al caso de los sistemas *tipo–gradiente* [1]: *“su atractor global tiene una descomposición de Morse, sin conexiones homoclínicas”*.

En el Capítulo 3 aparece el teorema 3.2.2 que demuestra la equivalencia entre dos familias de semigrupos. Este teorema se puede interpretar afirmando: `un semigrupo es gradiente si y sólo si es dinámicamente gradiente`. Para probar la suficiencia se utiliza la teoría expuesta en los primeros capítulos y para demostrar la necesidad se usan los resultados expuestos en la parte inicial del Capítulo 3. Así, como se afirma en [1]: *“la familia de semigrupos que son gradientes en el sentido de [17] se incrementa considerablemente, tal como muestra la ecuación de reacción–difusión con condiciones de frontera tipo Neumann”* que aparece en el ejemplo 2.1.3.

Finalmente, se construye una *función de Lyapunov generalizada* que a lo largo de las soluciones del semigrupo no sólo es estrictamente decreciente, sino también es diferenciable.

Maruja Yolanda Gavilán Gonzales
Lima, Perú.
2019

Capítulo 1

Resultados Preliminares

"No dejes nunca de empezar
y no empieces nunca a dejar".
Hipócrates

Se introducen los conceptos básicos que serán utilizados a lo largo del trabajo; inicialmente se establecen las notaciones, y luego se presentan algunos resultados técnicos necesarios. Se concluye caracterizando la descomposición de Morse de un atractor global. Esto será útil para probar la equivalencia de las definiciones dadas por distintos autores como [36] y [10]. Otras referencias usadas son [32, 29, 39, 17].

1.1 El concepto de semigrupo

Para contextualizar este concepto, que aparece en la definición 1.1.4, se recuerdan algunas propiedades topológicas de los espacios métricos, como la definición de clausura y su natural caracterización con la distancia que, entre otras cualidades, define una función continua. Por otro lado, para estudiar la propiedades dinámicas de los semigrupos además de analizar la evolución de los conjuntos por la acción del mismo, es necesario comparar los conjuntos que la evolución induce; por tal motivo en ésta sección se introduce la semidistancia de Hausdorff y algunas de sus propiedades.

1.1.1. En la presente tesis, el par (X, d) (o simplemente X) denota un espacio métrico cuya distancia

$$d : X \times X \to [0, +\infty)$$

está definida por medio de las propiedades usuales, tal como se describe en [25] o en [15]. En otras palabras, se admite:

$$d(x, y) \geq 0,$$
$$x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0,$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Además, la semi-distancia entre subconjuntos de X, escrita como $d(B, A)$, se define de manera natural con la siguiente fórmula.

$$d(B, A) = \text{ínf} \big\{ d(b, A) : b \in B \big\}; \qquad \forall A, B \subset X,$$

donde

$$d(x, A) = \text{ínf} \big\{ d(x, a) : a \in A \big\}; \quad \forall x \in X, \forall A \subset X.$$

A partir de esto, cada constante positiva $\varepsilon > 0$ genera $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ que es la $\varepsilon-$**vecindad** abierta de $A \subset X$. Este conjunto $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A) = \big\{ x \in X : d(x, A) < \varepsilon \big\}.$$

Es más, $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ también es igual a la unión de conjuntos centrados en elementos de A; específicamente se cumple que tal conjunto $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ es igual a $\big\{ x \in X : d(x, a) < \varepsilon,$ para algún $a \in A \big\}$. Análogamente, la respectiva $\varepsilon-$vecindad cerrada $\overline{\mathcal{O}}_\varepsilon(A)$ no solo esta dada por el conjunto $\big\{ x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon \big\}$ sino también es igual a la clausura de $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ (los puntos adherentes de $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$, en X). Para mayor información sobre la topología de los espacios métricos referimos al lector a [25], donde también se presentan propiedades suficientes para que la topología de un espacio topológico esté generada por una distancia.

1.1.2. La **clausura** de A en X, denotada por $\overline{A} = \overline{A}^X$, también es el menor conjunto cerrado de X que contiene al propio conjunto $A \subset X$. Por tal motivo, la continuidad de la métrica garantiza que $\overline{A}$ esté incluido en el conjunto cerrado dado por $\{x \in X : d(x, A) = 0\}$. Recíprocamente, cuando se fija un elemento $x \in X$ en el cual se verifica la igualdad $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$, la definición de ínfimo permite mostrar la siguiente implicación.

$$\epsilon > 0 \implies \big(0 \leq d(x, y) < \epsilon, \quad \text{para algún } y = y_\epsilon \in A\big).$$

En este contexto, para tal $x \in X$, la afirmación $d(x, y) > 0$, para todo $y \in \overline{A}$ genera la existencia de $\gamma > 0$ con $d(x, y) \geq 2\gamma$, $\forall y \in A$; consecuentemente, la afirmación anterior con $\epsilon = \gamma$ implica $2\epsilon \leq d(x, y_\epsilon) < \epsilon$. Esta contradicción demuestra que $d(x, A) = 0$ es suficiente para decir que $d(x, y) = 0$ para algún $y \in \overline{A}$, es decir $x \in \overline{A}$. En otras palabras, cada subconjunto $A \subset X$ satisface $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$. En particular,

$$\big(A = \overline{A} \quad y \quad d(x, A) = 0\big) \implies x \in A.$$

Por otro lado, la propiedad triangular de la métrica permite ver que si $A \neq \emptyset$, para cada $x, y \in X$, se cumple

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a), \quad \forall a \in A;$$

en otras palabras $d(x, A) - d(x, y)$ es una cota inferior para el conjunto $\{d(y, a) \colon a \in A\}$ y consecuentemente $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. Lo cual es equivalente a decir que $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Por lo tanto, la simetría de la métrica no sólo muestra $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$, sino también permite concluir que[1]

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X \text{ siempre que } A \neq \emptyset. \tag{1.1}$$

Análogamente, es viable obtener que

$$d(A, B) \leq d(z, A) + d(z, B), \quad \forall z \in X \text{ cuando } A \neq \emptyset, B \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

[1]Note que por cada subconjunto no vacío $A \subset X$, la función $X \ni z \mapsto d(z, A) \in [0, +\infty)$ resulta ser uniformemente continua.

1.1.3. Lo que hoy se conoce como la **semidistancia de Hausdorff** entre dos subconjuntos del espacio métrico, se define por medio de la siguiente igualdad.

$$d_H(A,B) = \sup\big\{d(a,B) : a \in A\big\}; \qquad A \subset X, \quad B \subset X.$$

Cuando la semidistancia $d_H(A,B) = 0$, cada elemento $a \in A$ satisface $d(a,B) = 0$, por consiguiente las propiedades de la métrica, descritas en los parágrafos **1.1.1** y **1.1.2** , permiten afirmar que

$$d_H(A,B) = 0 \implies \overline{A} \subset \overline{B}.$$

En particular, A será un subconjunto de B cuando la igualdad $d_H(A,B) = 0$ sea verdadera y el conjunto B sea cerrado. Además, las definiciones y las propiedades ya descritas permiten enunciar las siguientes sentencias.

- $\diamond$ Si $A = \{a\}$, entonces $d_H(A,B) = d(a,B)$;
- $\diamond$ $B_1 \subset B_2 \Rightarrow d_H(A,B_1) \geq d_H(A,B_2)$;
- $\diamond$ $A_1 \subset A_2 \Rightarrow d_H(A_1,B) \leq d_H(A_2,B)$;
- $\diamond$ $d_H(A,B) = d_H(\overline{A},B)$.

Cabe mencionar, sin embargo, la importancia del orden en d_H. Por ejemplo, el conjunto compacto $\overline{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ cumple

$$d_H\big(\{(0,0)\}, \overline{D}_1\big) = 0 \neq 1 = d_H\big(\overline{D}_1, \{(0,0)\}\big).$$

Finalmente, es preciso señalar que la **distancia simétrica de Hausdorff** entre $A \subset X$ y $B \subset X$ está definida por

$$D_H(A,B) = \text{máx}\big\{d_H(A,B), d_H(B,A)\big\}.$$

Esta función D_H, entre otras propiedades, transforma a la familia de todos los conjuntos compactos de (X,d) en un espacio métrico completo.

Definición 1.1.4. *Una familia* $T(\cdot) = \{T(t) : t \geq 0\}$ *de funciones continuas de* X *en* X *es un* ***semigrupo*** *en* X *si satisface las tres condiciones siguientes:*

- $\diamond$ $T(0) = I_X$, *donde* I_X *es la aplicación identidad en* X.
- $\diamond$ $T(s+t) = T(t)T(s)$ *(composición), para todo* $t, s \in [0, +\infty)$.
- $\diamond$ $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ *es continua.*

En particular,

$$\lim_{t \to 0+} T(t)x = x, \quad \text{por cada} \quad x \in X. \tag{1.3}$$

Además, se cumple la propiedad conmutativa para la composición:

$$T(t)T(s) = T(t+s) = T(s+t) = T(s)T(t), \quad \forall s, t \in [0, +\infty).$$

1.1.5. Un semigrupo, con propiedades útiles e ilustrativas, se obtiene a partir de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales en un espacio euclidiano de dimensión finita. Los libros [31, 22] hacen una presentación amena de esta teoría. Específicamente, cuando se considera que $L = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ es una matriz de orden $n \times n$ con cada elemento $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, se obtiene que las soluciones del siguiente sistema

$$\frac{du}{dt} = u_t = Lu, \quad \text{con} \quad u \in \mathbb{R}^n$$

son inducidas naturalmente por la **matriz exponencial**, que viene dada por

$$e^{tL} = I + tL + \frac{(tL)^2}{2!} + \frac{(tL)^3}{3!} + \cdots =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tL)^k}{k!}.$$

La demostración detallada de esta afirmación sobre las soluciones, se desarrolla por medio de las propiedades usuales de convergencia de series de matrices, en la norma de la matriz. El tramo con mayor importancia de esta prueba – que bien explicada, aparece en el segundo capítulo de [31] – consiste en verificar que se lleva a cabo la siguiente igualdad.

$$\frac{d}{dt} e^{tL} = \mathbf{L} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tL)^j}{j!} \right) = Le^{tL}.$$

Además, la dependencia continua de las soluciones del sistema junto a las propiedades usuales del álgebra de matrices implican que la igualdad $T(t) = e^{tL}$ define un semigrupo en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ (en realidad, $T(t) = e^{tL}$ será un flujo[2]). De modo similar, las propiedades vectoriales y topológicas de un espacio de Banach Y generalizan el ejemplo anterior al caso de un operador lineal **limitado** $L \in \mathcal{L}(Y)$. En este nuevo contexto, $T(t) = e^{tL} \in \mathcal{L}(Y)$ definirá un **semigrupo lineal**[3] en Y, en concordancia con la definición 1.1.4. En algunas publicaciones, este operador $L \in \mathcal{L}(Y)$ es llamado el **generador** infinitesimal del semigrupo $T(t) = e^{tL}$.

Observación 1.1.6. *Por la ecuación* (1.3)*, cada semigrupo lineal* $T(\cdot) \subset \mathcal{L}(X)$ *(formado por operadores lineales en un espacio de Banach,* X*) induce naturalmente un generador infinitesimal* A *que actúa en*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \textit{ existe el } \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\},$$

por medio de la regla

$$Ax = \lim_{t\to 0+} \left\{ \frac{T(t)x - x}{t} \right\}, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Este generador A *es cerrado y* $D(A)$ *es denso. Por el [29, Teorema 1.2],*

$$A \textit{ es limitado } \Leftrightarrow \lim_{t\to 0+} ||T(t) - I||_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

y en caso afirmativo $T(t) = e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$.

[2]Un flujo C^r en X es una función $\phi : \mathbb{R}\times X \to X$, de clase C^r que satisface $\phi(0,x) = x$ y

$$\phi(t, \phi(s,x)) = \phi(t+s, x) \; \forall t, s \in \mathbb{R}, x \in X.$$

[3]El semigrupo se dice lineal pues $e^{tL} \in \mathcal{L}(X)$ para todo t. Esto se obtiene de la desigualdad

$$||e^{tL}||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{||tL||_{\mathcal{L}(X)}}.$$

El siguiente teorema – que presenta una caracterización de los operadores que generan semigrupos de contracción[4], que además satisfacen la condición de convergencia (1.3) – es uno de los más importantes dentro la teoría de semigrupos de operadores, claramente presentada en [29]. Para una prueba completa no solo es necesaria una nueva teoría complementaria de los operadores, sino también se aleja de los objetivos centrales del presente trabajo.

Teorema 1.1.7 (Hille–Yosida)**.** *Si* $A : D(A) \subset X \to X$ *es un operador lineal, con* X *un espacio de Banach entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A *es el generador infinitesimal de un semigrupo* $T(\cdot) \subset \mathcal{L}(X)$ *que satisface* (1.3) *tal que para alguna constante* $w \in \mathbb{R}$*,*

$$||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{wt} \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

(b) A *es cerrado,* $D(A)$ *es denso en* X*, para alguna constante* $w \in \mathbb{R}$ *el intervalo* $(w, +\infty) \subset \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I$ *es biyectivo*$\}$ *y*

$$||(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - w} \quad \textit{para todo } \lambda > w.$$

Demostración. Referimos al lector al Teorema 3.1 de [29]. □

1.2 Conjuntos límite para un semigrupo

La definición que se presenta en esta sección ha sido seleccionada de los libros [17] y [39]. Hasta donde se sabe, ésta es la más aceptada en la literatura actual sobre los sistemas dinámicos de dimensión infinita [10, 34]. Sus principales propiedades aparecen en la proposición 1.2.9, y todas ellas permiten dar una descripción inicial de las órbitas asociadas a un semigrupo.

[4]El semigrupo $T(\cdot) \subset \mathcal{L}(X)$ es de **contracción** si el respectivo espacio de Banach $(X, |\cdot|)$ admite una norma equivalente con la cual los operadores cumplen

$$|T(t)|_{\mathcal{L}} \leq 1, \forall t \geq 0.$$

1.2.1. Sea $T(\cdot)$ un semigrupo en X. Para cada elemento $x \in X$ se presenta al conjunto $\gamma^+(x)$ que se conoce como la **órbita positiva** de $x \in X$. Esta órbita se define como el siguiente subconjunto de X

$$\gamma^+(x) = \big\{T(t)x : t \in [0, +\infty)\big\}.$$

En general, cuando E forma parte del espacio X, la respectiva **órbita positiva**[5] del conjunto E viene dada por la siguiente unión

$$\gamma^+(E) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)E.$$

Además, lo que se conoce como el conjunto $\omega-$**límite**, asociado a E (conjunto límite positivo) se define como la siguiente intersección

$$\omega(E) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma^+(T(s)E)} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\big(\bigcup_{t\geq s} T(t)E\big)}.$$

Naturalmente, $\omega(E)$ es un cerrado y siempre verifica la igualdad

$$\omega(E) = \omega\big(T(t)E\big),$$

para cualquier elección del parámetro $t \geq 0$. Cabe mencionar, que cuando el espacio métrico es compacto cada conjunto $\omega-$límite siempre tiene elementos, pero en general existen semigrupos para los cuales algún E verifica que su conjunto $\omega(E)$ es vacío.

1.2.2. De acuerdo a la definición presentada, cuando E es un conjunto no vacío del espacio X, puede ocurrir que

$$\omega(E) \neq \bigcup_{z \in E} \omega(z).$$

Es decir, $\omega(E)$ describe el comportamiento dinámico de E, cuyas características pueden ser diferentes a las propiedades dinámicas de las órbitas inducidas individualmente por los elementos de E.

[5] La órbita de E, después de un tiempo $\tau \in [0, +\infty)$ está definida por

$$\gamma^+_\tau(E) = \gamma^+\big(T(\tau)E\big).$$

Se considera, por ejemplo, la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{y} = y(1-y)(2+y) \in \mathbb{R}.$$

Sus soluciones siempre existen y hay unicidad con respecto a la condición inicial; además, las únicas soluciones constantes (equilibrios) son tres: 0 ; 1 y -2. Las propiedades básicas de la derivada de una función de variable real, permiten afirmar que cualquier solución no constante $y(t) = T(t)y_0$, donde $t \geq 0$, siempre es creciente (respectivamente, decreciente) cuando la condición inicial está en $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$ (respectivamente en $(-2, 0) \cup (1, +\infty)$). En estas circunstancias, si se considera el intervalo cerrado $E = [-2, 1]$, las condiciones iniciales poseen la siguiente propiedad.

$$y_0 \in [-2, 1] \implies \lim_{t \to +\infty} T(t)y_0 = \begin{cases} 1, & 0 < y_0 \leq 1; \\ 0, & y_0 = 0; \\ -2, & -2 \leq y_0 < 0. \end{cases}$$

De este modo, el conjunto $E = [-2, 1]$ no se modifica cuando se aplica el semigrupo, es decir $T(t)[-2, 1] = [-2, 1], \forall t \geq 0$. Por lo tanto:

$$\bigcup_{z \in E} \omega(z) = \{-2, 0, 1\} \neq E = \omega(E).$$

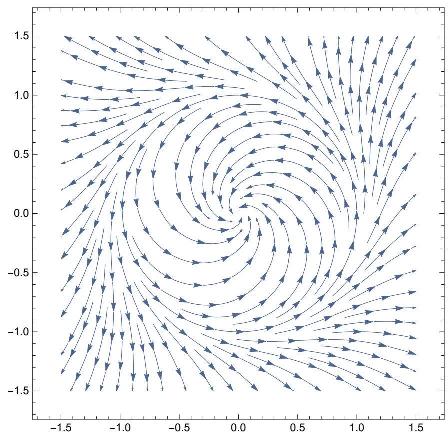

Figura 1.1: Retrato de fase del sistema (1.4)

Ejemplo 1.2.3. *Para ilustrar mejor la propiedad anterior de los conjuntos límite, se considera el siguiente sistema no lineal, formado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias.*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + (x^2 + y^2 - 1)x, \\ \dot{y} &= \quad x + (x^2 + y^2 - 1)y. \end{cases} \tag{1.4}$$

Las soluciones estarán en el plano $\mathbb{R}^2$*, el cual admite una representación natural en las coordenadas polares* (r, θ) *que se obtiene de las igualdades* $x = r\cos\theta$ *y* $y = r\sin\theta$*. En estas nuevas coordenadas, el sistema* (1.4) *toma la siguiente forma*

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(r^2 - 1); \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases}$$

Este sistema está estrechamente relacionado con la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = r(r^2 - 1),$$

útil para describir el sistema. Todas esta propiedades permiten verificar que el origen de coordenadas $(0, 0)$ *es un punto de equilibrio para* (1.4)*. Además, cada solución de* (1.4) *toma la forma*

$$\big(x(t), y(t)\big) = T(t)(x(0), y(0)) = T(t)(x_0, y_0)$$

y genera la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ *(periódica) si y sólo si la condición inicial* (x_0, y_0) *satisface la ecuación* $(x_0)^2 + (y_0)^2 = 1$*. De este modo, cuando se considera el conjunto compacto* $\overline{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$*, se observa que:*

- *Si* $(x_0, y_0) \in \partial\overline{D}_1$*, entonces* $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)(x_0, y_0) \in \partial\overline{D}_1$*.*
- *Si* $(x_0, y_0) \in D_1$*, entonces* $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)(x_0, y_0) = (0, 0)$*.*

De aquí se desprende directamente que $T(t)\overline{D}_1 = \overline{D}_1$ *para todo* $t \geq 0$*, En consecuencia,*

$$\overline{D}_1 = \omega(\overline{D}_1) \neq \{0\} \cup \partial\overline{D}_1 = \bigcup_{z\in\overline{D}_1} \omega(z).$$

Además, $\omega(z) = \emptyset$ *para todo* $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}_1$*.*

A continuación se presenta una útil caracterización natural de cada conjunto límite, por medio de sucesiones. Se considera una sucesión en el dominio del semigrupo y otra en el conjunto del cual se quiere estudiar su conjunto límite.

Lema 1.2.4. *Sea E un subconjunto de X. En estas condiciones, un elemento $y \in X$ pertenece a $\omega(E)$ si y sólo si existen las sucesiones*

$$x_k \in E \quad \text{y} \quad t_k \geq 0, \textit{ tal que } \lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty \quad y \quad \lim_{k\to+\infty} T(t_k)x_k = y. \tag{1.5}$$

En otras palabras, el conjunto límite verifica la siguiente igualdad

$$\omega(E) = \Big\{ y \in X \colon \exists \;\, x_k \in E, \;\, \exists t_k \geq 0, \;\, \textit{de modo que } T(t_k)x_k \xrightarrow{t_k\to\infty} y \Big\}.$$

Demostración. Se considera un elemento cualquiera $y \in \omega(E)$. Para la sucesión creciente $s_k \geq k$, cada una de las siguientes uniones $\overline{\bigcup_{t\geq s_k} T(t)E}$ contiene todo el conjunto límite. Así, la intersección de todos estos conjuntos $\bigcap_{k\geq 1}\left(\overline{\bigcup_{t\geq s_k} T(t)E}\right) \supset \omega(E)$, por este motivo cuando $k \geq 1$ siempre existe algún elemento $y_k \in X$ para el cual se verifica

$$y_k \in \bigcup_{t\geq s_k} T(t)E \quad \wedge \quad d(y, y_k) < \frac{1}{k}.$$

Luego, existe t_k tal que

$$y_k = T(t_k)x_k \quad \text{con} \quad t_k \geq s_k \quad \text{y} \quad x_k \in E.$$

Esto demuestra (1.5), pues $s_k \to +\infty$.

Recíprocamente, cuando se admite las suposiciones de (1.5), por cada constante positiva $s \geq 0$, existe una subsucesión ilimitada $t_{k_n} > s$ con la cual se verifican las siguientes condiciones

$$y = \lim_{n\to+\infty} T(t_{k_n})x_{k_n} \in \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)E}.$$

En consecuencia, el elemento $y \in X$ de (1.5) pertenece al conjunto límite, $y \in \omega(E)$. Por lo tanto, se concluye la demostración y el presente lema es verdadero. $\square$

1.2.5. La caracterización anterior garantiza que la condición de ser un conjunto límite, preserva la relación de inclusión de la siguiente manera.

$$A \subset B \Rightarrow \omega(A) \subset \omega(B).$$

Además, en cada conjunto $\omega-$límite (asociado a $E \subset X$) sus elementos $y \in \omega(E)$ y las sucesiones dadas en (1.5) permiten obtener que para cada parámetro positivo $t \geq 0$,

$$t + t_k \to +\infty \quad y \quad T(t)T(t_k)x_k = T(t + t_k)x_k \to T(t)y \quad \text{con} \quad x_k \in E.$$

En consecuencia, el conjunto $\omega(E)$ satisface la propiedad importante de ser **positivamente invariante** en el siguiente sentido

$$T(t)\omega(E) \subset \omega(E), \ \forall t \geq 0. \tag{1.6}$$

Por tal motivo, para cualquier elemento $y \in \omega(E)$, su respectiva órbita positiva $\gamma^+(y)$ es parte de $\omega(E)$, pues $\gamma^+(y) \subset \omega(E)$.

Los siguientes corolarios (del lema 1.2.4) describen algunas propiedades básicas de los conjuntos límites que permitirán estudiar y analizar algunas propiedades dinámicas, como por ejemplo la existencia del atractor global de un semigrupo.

Corolario 1.2.6. *Si el conjunto* $\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)E} \subset X$ *es compacto entonces*

$$T(t)\omega(E) \supset \omega(E), \forall t \geq 0.$$

Demostración. Se elige un elemento $y \in \omega(E)$ como en el lema 1.2.4. Para cada constante positiva $t > 0$, se usa una subsucesión ilimitada $t_{k_n} > t$ y por la compacidad se obtiene la existencia de

$$x = \lim_{n\to+\infty} T(t_{k_n} - t)x_{k_n}.$$

Como $t_{k_n} - t \to \infty$ y $x_{k_n} \in E$ se cumple que $x \in \omega(E)$, y así

$$T(t)x = \lim_{n\to+\infty} T(t)T(t_{k_n} - t)x_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} T(t_{k_n})x_{k_n} = y.$$

Es decir, el corolario es verdadero. $\square$

Corolario 1.2.7. *Si existe algún conjunto $F \subset X$, no vacío que verifica la siguiente igualdad $\lim\limits_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)B, F\big) = 0$, para algún $B \subset X$ entonces su clausura $\overline{F}$ incluye el conjunto $\omega-$límite de B, es decir $\overline{F} \supset \omega(B)$.*

Demostración. Sea $y \in \omega(B)$. Por el lema 1.2.4, existe un sucesión de números $t_k \to +\infty$ y otra sucesión de elementos $b_k \in B$ para las cuales se satisface la siguiente igualdad $y = \lim\limits_{t_k\to+\infty} T(t_k)b_k$. Con todos estos datos, inducidos por $y \in \omega(B)$, la definición de la semidistancia d_H implica que, para cualquier parámetro $t_k \geq 0$ se verifica la siguiente cadena de desigualdades

$$0 \leq d\big(T(t_k)b_k, F\big) \leq \sup_{b\in B} d\big(T(t_k)b, F\big) = d_H\big(T(t_k)B, F\big).$$

En este contexto, al hacer que la sucesión $t_k \to +\infty$, se obtiene directamente que la distancia $d(y, F)$ es cero. Con esto, los resultados del parágrafo **1.1.2** muestran que el límite $y \in \overline{F}$. Por lo tanto, se verifica $\omega(B) \subset \overline{F}$ y se concluye con la demostración del presente corolario. □

El siguiente corolario se ha tomado del trabajo [32] y describe una de las propiedades ilustrativas de los conjuntos límite. Un elemento importante en la demostración es la relación de la conexidad con la continuidad.

Corolario 1.2.8. *Si el conjunto $\omega(E) \neq \emptyset$ es compacto y*

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)B, \omega(E)\big) = 0 \text{ *para algún conexo* } B \supset E,$$

entonces $\omega(E)$ es conexo.

Demostración. Se procede por contradicción.

(a) Existen dos conjuntos compactos $w_1 \neq \emptyset$ y $w_2 \neq \emptyset$ de modo que

$$\omega(E) = w_1 \cup w_2 \quad \text{ y } \quad w_1 \cap w_2 = \emptyset.$$

En particular, su distancia $d(w_1, w_2) > 2\delta > 0$.

A partir de la suposición en (a), se usa la hipótesis en la $\delta-$vecindad $\mathcal{O}_\delta(\omega(E))$. De este modo la definición de d_H en la condición $\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)B, \omega(E)\big) = 0$ garantiza la existencia de algún parámetro positivo $t_\delta > 0$ para el cual la desigualdad $t \geq t_\delta$ genera que la constante $\delta > \sup_{b\in B} d\big(T(t)b, \omega(E)\big)$. Es decir,

$$t \geq t_\delta \Rightarrow T(t)b \in \mathcal{O}_\delta(\omega(E)),\ \forall b \in B.$$

Así, la continuidad de $T(t)$, junto a la conexidad de $[t_\delta, +\infty) \times B$ y la suposición en (a) muestran la siguiente implicación.

$$t \geq t_\delta \Rightarrow T(t)B \text{ es un subconjunto conexo de } \mathcal{O}_\delta(w_1) \cup \mathcal{O}_\delta(w_2),$$

donde $\overline{\mathcal{O}}_\delta(w_1) \cap \overline{\mathcal{O}}_\delta(w_2) = \emptyset$. Con esto se obtiene que:

(b) Existe $t_\delta > 0$ de modo que

$$\text{o} \quad \bigcup_{t\geq t_\delta} T(t)B \subset \mathcal{O}_\delta(w_1) \quad \text{o} \quad \bigcup_{t\geq t_\delta} T(t)B \subset \mathcal{O}_\delta(w_2),$$

donde $\delta > 0$, w_1 y w_2 satisfacen (a).

Para concluir, se observa que (b), $\omega(B) = \omega\big(T(t_\delta)B\big)$ y **1.2.5** implican que se debe cumplir:

$$\text{o} \quad \omega(E) \subset \omega(B) \subset \overline{\mathcal{O}}_\delta(w_1) \quad \text{o} \quad \omega(E) \subset \omega(B) \subset \overline{\mathcal{O}}_\delta(w_2).$$

Esta contradicción con (a) demuestra la conexidad de $\omega(E)$ □

Con todos los resultados presentados hasta ahora, ya es posible introducir la siguiente proposición que describe las propiedades básicas de los conjuntos límite y serán útiles para el desarrollo del presente trabajo. Por ejemplo, las caracterizaciones que se presentan se usarán no solo en la descripción de las condiciones que garanticen la existencia del atractor global de un semigrupo, sino también al dar las propiedades que distinguen y determinan a la descomposición de Morse, una herramienta importante para entender la dinámica de un atractor global.

Proposición 1.2.9. *Sea E un subconjunto de X, en el cual está definido un semigrupo $T(\cdot)$.*

(a) Si el conjunto $\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)E}$ es compacto entonces $\omega(E)$ es compacto y

$$T(t)\omega(E) = \omega(E), \quad \forall t \geq 0. \qquad \textit{(invariante)}.$$

(b) Sea $\omega(E)$ un compacto no vacío que satisface

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)B, \omega(E)\big) = 0 \qquad (\omega(E) \textit{ atrae a } B).$$

Si $B \supset E$ es un conjunto conexo entonces $\omega(E)$ es un conjunto conexo que además es igual a $\omega(B)$.

(c) Suponga que $\omega(E)$ es un compacto no vacío que atrae a E. Si E es conexo entonces $\omega(E)$ es conexamente invariante[6]*.*

Demostración. En el ítem (a) se observa que el conjunto compacto

$$\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t)E}$$

contiene al conjunto cerrado $\omega(E)$ (vea **1.2.1**); de aquí sigue la compacidad del conjunto límite presentado en (a). Por otro lado, del corolario 1.2.6 y (1.6) se obtiene la invarianza: $T(t)\omega(E) = \omega(E), \forall t \geq 0$. Por lo tanto, la afirmación (a) es verdadera.

En el ítem (b), la conexidad e igualdad de los conjuntos límites, se obtiene de las siguientes afirmaciones (1.7) y (1.8). La primera:

$$\omega(E) \text{ atrae a } B \supset E \implies \omega(E) = \omega(B) \tag{1.7}$$

sigue de **1.2.5** y del Corolario 1.2.7 con $F = \omega(E)$.
La segunda:

$$\text{El compacto } \omega(E) \neq \emptyset \text{ es conexo} \tag{1.8}$$

viene dada por el Corolario 1.2.8. Por lo tanto, $\omega(E) = \omega(B)$ es conexo y se obtiene que (b) se cumple.

[6]Un subconjunto $A \subset X$ cerrado e invariante es **conexamente invariante** si **no** se puede representar como la unión de dos subconjuntos F_1 y F_2 no vacíos, disjuntos y cerrados tal que $T(t)F_i \subset F_i, \forall t \geq 0$ para $i = 1, 2$. [32].

Para demostrar (c) se procede por el absurdo.

(c.1) El compacto invariante $\omega(E)$ no es conexamente invariante. Es decir, existen dos compactos $F_1 \neq \emptyset$ y $F_2 \neq \emptyset$ que no solo satisfacen

$$\omega(E) = F_1 \cup F_2 \quad \text{con} \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset, \tag{1.9}$$

sino también, son positivamente invariantes:

$$T(t)F_1 \subset F_1 \quad \text{y} \quad T(t)F_2 \subset F_2. \tag{1.10}$$

Por las condiciones dadas en (1.9), la distancia entre los conjuntos compactos es positiva, $d(F_1, F_2) > 0$. De este modo, para la igualdad $0 < 6\varepsilon = d(F_1, F_2)$, la intersección entre las siguientes vecindades $\mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_1) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_2) = \emptyset$. De lo contrario, si existe algún elemento $z \in \mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_1) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_2)$ se obtiene la siguiente desigualdad $d(F_1, F_2) \leq d(z, F_1) + d(z, F_2) < 4\varepsilon$. Esta contradicción con la elección de la constante $\varepsilon > 0$ muestra la siguiente afirmación,

(c.2) Existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_1) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_2) = \emptyset$.

Por otro lado, cuando se considera una constante $\epsilon > 0$ siempre existe una bola abierta $B(a, \gamma_a)$ con $\epsilon > \gamma_a > 0$ para la cual, su imagen $T(t)\big(B(a, \gamma_a)\big)$ está incluida en $B(T(t)a, \epsilon)$. Como la compacidad de cada F_i garantiza la existencia de la siguiente constante positiva $0 < \gamma = \text{mín}\{\gamma_a : F_i \subset$ unión finita de $B(a, \gamma_a)\}$, se obtiene que;

$$T(t)\left[\bigcup_{finita} B(a, \gamma)\right] \subset \bigcup_{finita} T(t)B(a, \gamma_a) \subset \bigcup_{finita} B(T(t)a, \epsilon).$$

La elección de esta constante positiva $\gamma > 0$ junto a (1.10) muestran la siguientes inclusiones

$$T(t)\big(\mathcal{O}_\gamma(F_i)\big) \subset \mathcal{O}_\epsilon(T(t)F_i) \subset \mathcal{O}_\epsilon(F_i).$$

Por lo tanto, se cumple:

(c.3) Para $\epsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que $T(t)(\mathcal{O}_\gamma(F_i)) \subset \mathcal{O}_\epsilon(F_i)$ para todo $t \geq 0$.

Para continuar, se elige la constante positiva $\varepsilon > 0$ dada en el ítem (c.2). En estas circunstancias, la última afirmación (c.3) induce y garantiza la existencia de una constante $0 < \delta < \varepsilon$ para la cual se verifican las siguientes inclusiones.

$$T(t)\big(\mathcal{O}_{2\delta}(F_i)\big) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_i) \quad \text{para} \quad i = 1; 2 \quad \text{y} \quad t \geq 0 \tag{1.11}$$

Para concluir, basta utilizar la prueba del Corolario 1.2.8. Es decir, la condición (1.11), la elección que se hizo de la constante positiva $0 < \delta < \varepsilon$ y el dato, sin utilizar, que el compacto $\omega(E)$ atrae al conexo E generan el contexto adecuado para poder utilizar la demostración del Corolario 1.2.8. Con esto es posible afirmar que

(c.4) Existe un parámetro $t_\delta > 0$ de modo que

$$\text{o} \quad \bigcup_{t \geq t_\delta} T(t)E \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_1) \quad \text{o} \quad \bigcup_{t \geq t_\delta} T(t)E \subset \mathcal{O}_\varepsilon(F_2),$$

donde F_1 y F_2 son los conjuntos compactos que satisfacen (1.9) y $\varepsilon > 0$ es la constante que viene dada por (c.2).

De (c.4) se obtiene que

$$\text{o} \quad \omega(E) \subset \mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_1) \quad \text{o} \quad \omega(E) \subset \mathcal{O}_{2\varepsilon}(F_2).$$

Por (c.2), se cumple

$$\text{o} \quad \omega(E) \cap F_2 = \emptyset \quad \text{o} \quad \omega(E) \cap F_1 = \emptyset$$

Esta contradicción con (c.1) demuestra (c) y se concluye, □

1.3 Atractor global: definición y existencia

Para presentar adecuadamente la definición 1.3.9, que determina a un atractor global, se describen las características que identifican a los conjuntos invariantes, pues cada atractor global será un compacto invariante que atrae a todos los conjuntos limitados. También se introducen formalmente los conceptos de atracción y absorción.

1.3.1. Como siempre, se considera que el semigrupo $T(\cdot)$ está definido en el espacio X. Inicialmente se recuerda que cada subconjunto $A \subset X$ que cumple

$$T(t)A = A, \text{ para todo } t \geq 0 \tag{1.12}$$

es llamado (estrictamente) **invariante**. Por ejemplo, se toma en cuenta al conjunto $\mathcal{E} \subset X$ que está definido por *todos los equilibrios del semigrupo*, en otras palabras

$$\mathcal{E} = \{u \in X \colon T(t)u = u, \ \forall t \geq 0\} = \{u \in X : u \text{ es un } \textbf{equilibrio}\}.$$

Este conjunto $\mathcal{E}$ no solo es invariante, sino también, de un modo peculiar, todos sus subconjuntos son invariantes bajo la acción del semigrupo. Otros ejemplos importantes de conjuntos invariantes aparecen en la proposición 1.2.9, de la sección anterior donde aparecen los conjuntos límite. Del mismo modo, si se analiza y observa al semigrupo dado en el apartado **1.1.5**, aparecen otros conjuntos ilustrativos que satisfacen (1.12) como por ejemplo cada una de las órbitas $\{e^{tL}u : t \in \mathbb{R}\}$, cuando se fija la llamada condición inicial $u \in \mathbb{R}^n$. En especial, cada conjunto compacto y conexo del plano cuya frontera está formada por un número finito de órbitas periódicas de un flujo (órbitas homeomorfas a una circunferencia) también es invariante. Vea por ejemplo el semigrupo definido por el sistema (1.4) junto al conjunto compacto

$$\overline{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\},$$

que está limitado por la circunferencia

$$\partial\overline{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

Como se describe en el ejemplo 1.2.3, la circunferencia $\partial\overline{D}_1$ es una órbita periódica y por lo tanto, no solo ella es invariante por (1.4), sino también el conjunto $\overline{D}_1$. Cabe mencionar, que existen conjuntos invariantes (compactos y conexos) que incluyen a otros conjuntos invariantes, con las mismas restricciones topológicas.

A continuación se describen algunas propiedades de un conjunto invariante y su conjunto límite asociado.

Proposición 1.3.2. *Sea $B \subset X$ un conjunto invariante de $T(\cdot)$.*

(a) Si adicionalmente $B \subset X$ es secuencialmente compacto[7] *entonces su clausura $\overline{B}$ también es invariante.*

(b) Si el conjunto invariante $B \subset X$ es cerrado entonces su conjunto límite satisface $\omega(B) = B$.

Demostración. En (a), cada elemento $z \in \overline{B}$ admite una sucesión $z_n \in B$ que converge $z_n \to z$. Como la sucesión $T(t)z_n \to T(t)z$ (continuidad) y cada imagen $T(t)z_n \in B$ (invarianza), se obtiene que la imagen del límite $T(t)z \in \overline{B}$. En otras palabras,

$$T(t)\overline{B} \subset \overline{B} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Por otro lado, cuando $z_n \in B$ y $z_n \to z \in \overline{B}$, para cada parámetro $t \geq 0$ existe un elemento $w_n \in B$ para el cual se cumple $T(t)w_n = z_n$ (B satisface (1.12)). Eligiendo una subsucesión convergente $w_{n_k} \to w \in \overline{B}$ se obtiene que $z = T(t)w \in T(t)\overline{B}$. Esto significa que

$$\overline{B} \subset T(t)\overline{B} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto se cumple (a)

En (b), cuando $z \in B$, cada $k \in \mathbb{N}$ induce algún $x_k \in B$ tal que $T(k)x_k = z$. Como $\lim_{k\to+\infty} T(k)x_k = z$, el lema 1.2.4 muestra que $z \in \omega(B)$. Es decir

$$B \subset \omega(B).$$

Por otro lado, si $y \in \omega(B)$ la caracterización de (1.5) genera las sucesiones $x_k \in B$ y $t_k \geq 0$ con $t_k \to +\infty$ y $T(t_k)x_k \to y$. Por la invarianza, $T(t_k)x_k \in B$ y así $y \in \overline{B}$. Se concluye que $\omega(B) \subset B$. Por lo tanto, se cumple (b). ☐

[7] Un conjunto $B \subset X$ se dice **secuencialmente compacto** en X cuando cada sucesión $z_n \in B$ admite una subsucesión que converge a un límite en $\overline{B}$.

Los siguientes conceptos permitirán presentar la importante definición de un atractor global y algunas propiedades que garanticen su existencia.

Definición 1.3.3. *Se dice que $A \subset X$* ***absorbe*** *al conjunto $B \subset X$, bajo la acción de $T(\cdot)$, si existe una constante $t_B > 0$ de modo que*

$$T(t)B \subset A \text{ para todo } t \geq t_B.$$

Análogamente, el conjunto $A \subset X$ ***atrae*** *a $B \subset X$, bajo la acción de $T(\cdot)$, cuando se cumple la siguiente exigencia.*

$$d_H\big(T(t)B, A\big) \xrightarrow{t\to+\infty} 0. \tag{1.13}$$

A continuación se presenta la natural relación que existe entre estos dos conceptos.

Observación 1.3.4. *El requisito en el límite de* (1.13) *es equivalente a decir que la vecindad inducida $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ por cada constante $\varepsilon > 0$ absorbe al conjunto B.*

$$A \text{ atrae } B \Leftrightarrow \big\{\forall\varepsilon > 0,\ \exists t_{(B,\varepsilon)} > 0 \text{ tal que } T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \text{ si } t \geq t_{(B,\varepsilon)}\big\}. \tag{1.14}$$

Esta afirmación se obtiene de ***1.1.3****, que permite mostrar la siguiente equivalencia*

$$T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \Leftrightarrow d_H\big(T(t)B, A\big) \leq \varepsilon.$$

Ejemplo 1.3.5. *El conjunto $A = \{0\}$ atrae a cualquier compacto $B \subset \mathbb{R}^n$ cuando en el semigrupo e^{tL} de* ***1.1.5*** *se considera una matriz L cuyo espectro*

$$\sigma(L) = \{\text{Autovalores de } L\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\},$$

donde $\Re(z)$ denota la parte real de $z \in \mathbb{C}$. Esto sucede por ejemplo cuando la matriz $L = \big(a_{i,j}\big)_{i,j=1}^n$ satisface

$$\begin{cases} a_{i,j} = 0, & \text{si} \quad j > i, \\ a_{i,i} < 0, & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En consecuencia, el sistema lineal $\frac{du}{dt} = Lu \in \mathbb{R}^n$ admite a $\{0\}$ como un conjunto invariante que atrae a cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

Observación 1.3.6. *Si L es una matriz real de orden $n \times n$, su norma*

$$||L|| = \sup_{u \neq 0} \frac{||Lu||}{||u||} \geq \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(L)\}.$$

Además, por cada $\lambda > 0$, el espectro

$$\sigma(L - \lambda I) = \sigma(L) - \lambda.$$

En particular, si $\sigma(L) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$ (ejemplo 1.3.5) entonces

$$||L - \lambda I|| \geq \lambda \quad \text{por cada } \lambda \in (0, +\infty). \tag{1.15}$$

Teorema 1.3.7 (Lumer–Phillips). *Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal, con X un espacio de Banach tal que*

$$||(A - \lambda I)x|| \geq \lambda ||x|| \quad \text{para todo} \quad x \in D(A) \text{ y } \lambda \in (0, +\infty). \tag{1.16}$$

Si existe $\lambda_0 > 0$ tal que $(\lambda_0 I - A)$ es sobreyectivo entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $T(\cdot) \subset \mathcal{L}(X)$ que satisface (1.3).

Demostración. La prueba sigue del teorema 1.1.7. Las hipótesis del teorema implican que A es cerrado, $\rho(A) \supset (0, +\infty)$ y $||\lambda(A - \lambda I)^{-1}|| \leq 1$, para todo $\lambda > 0$. Los detalles aparecen en [29, Teorema 4.3]. ☐

Observación 1.3.8. *Los autores de [13] publicaron el sistema no lineal*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + z(x + zy)^2, \\ \dot{y} &= -y - (x + zy)^2, \\ \dot{z} &= -z. \end{cases}$$

En este sistema, la solución $\gamma(t) = (18e^t, -12e^{2t}, e^{-t})$ va hacia infinito cuando el parámetro crece indefinidamente. Por lo tanto, el origen no atrae al conjunto $\{\gamma(0)\}$ aun cuando el campo vectorial asociado

$$F(x, y, z) = \big(-x + z(x + zy)^2, -y - (x + zy)^2, -z \big),$$

satisface $F(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ y su derivada DF_u cumple

$$\{\text{Autovalores de } DF_u : u \in \mathbb{R}^3\} = \{-1\} \subset \big\{z \in \mathbb{C}^2 : \Re(z) < 0\big\}.$$

(vea el ejemplo 1.3.5). En [35] aparece un estudio de esta estrategia en espacios de Banach.

Definición 1.3.9. *Se dice que el conjunto $\mathcal{A} \subset X$ es un* ***atractor global*** *para el semigrupo $T(\cdot)$ cuando:*

- $\diamond$ *$\mathcal{A}$ es compacto en X.*
- $\diamond$ *$\mathcal{A}$ es invariante, respecto al semigrupo $T(\cdot)$ (vea* ***1.3.1****).*
- $\diamond$ *$\mathcal{A}$ atrae a cada conjunto acotado de X, bajo la acción de $T(\cdot)$.*

El atractor global atrae a los conjuntos acotados con la distancia d_H, de alguna manera la atracción podría pensarse como uniforme.

Observación 1.3.10. *Antes de presentar el ejemplo 1.3.19, cabe citar a Geneviève Raugel, quien en [32] observa que la definición anterior "considera la topología, lo cuál es útil en espacios que admiten topologías no equivalentes, como un espacio de Hilbert con la topología débil y la topología de la norma. Antes de* 1983 *(año en que los autores [5, 4] la introdujeran, con el nombre 'atractor maximal') en la literatura sobre los atractores, la atracción como tal no fue del todo discutida. Después de* 1983*, el término atractor global se estandariza, pero en algunos casos es llamado 'atractor universal' [39] o con mayor precisión 'mínimo atractor cerrado $B-$global' [23]." Respecto a un tipo especial de flujos, es necesario indicar que una reciente descripción interna del atractor global aparece en [37].*

A continuación se describen algunas propiedades necesarias del atractor global, como por ejemplo su unicidad.

Proposición 1.3.11. *Sea $\mathcal{A} \subset X$ un atractor global para $T(\cdot)$.*

(a) $\mathcal{A}$ es minimal entre los compactos, atrayentes: Si B es un compacto de X que atrae cada conjunto acotado de X entonces $B \supset \mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A}$ es maximal entre los invariantes, cerrados y acotados: Si B es cerrado y acotado en X y además es invariante respecto a $T(\cdot)$ entonces $B \subset \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{A}$ es único.

Demostración. Para demostrar (a), considere un conjunto compacto $B \subset X$, que atrae a cada conjunto acotado de X. En particular, B atrae al propio atractor global $\mathcal{A}$, en otras palabras se cumple:

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)\mathcal{A}, B\big) = 0.$$

A partir de la invarianza: $\mathcal{A} = T(t)\mathcal{A}, \forall t \geq 0$, se obtiene directamente que la semidistancia $d_H(\mathcal{A}, B)$ es cero, y por tal motivo se dan las siguientes inclusiones $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \overline{B} = B$ (vea **1.1.3**). Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un compacto atrayente minimal. Se cumple (a).

Para probar (b), se elige a $B \subset X$ como un conjunto invariante, cerrado y acotado. Por su definición, el atractor global $\mathcal{A}$ atrae a B, que es acotado. En otras palabras,

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)B, \mathcal{A}\big) = 0.$$

En este contexto, se cumple $T(t)B = B, \forall t \geq 0$ y la igualdad $d_H(B, \mathcal{A}) = 0$: a partir de esto, se obtiene que $B = \overline{B} \subset \mathcal{A}$ y se concluye. Por lo tanto, se cumple (b).

El ítem (c) se obtiene directamente de (a) y (b). □

Corolario 1.3.12. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si se considera el conjunto*

$$\mathcal{E} = \{u \in X \colon T(t)u = u,\ \forall t \geq 0\},$$

entonces $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.

Demostración. Cuando $p \in \mathcal{E}$, el conjunto $\{p\}$ es invariante, cerrado y acotado. Por la proposición 1.3.11, $\{p\} \subset \mathcal{A}$ y se concluye $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. □

1.3.13. Un conjunto acotado $B_0 \subset X$ es **absorbente** si por cada acotado B de X existe $t_B \geq 0$ tal que $T(t)B \subset B_0$ para todo $t \geq t_B$. En otras palabras, el conjunto acotado B_0 absorbe cualquier acotado. Análogamente, un conjunto es **atrayente** cuando atrae a cada subconjunto acotado de X (definición 1.3.3).

Lema 1.3.14. *Si para $T(\cdot)$ existen $B_0 \subset X$ y $C \subset X$ tales que:*

- ◇ *B_0 es absorbente con $\overline{B_0}$, compacto y $\bigcup\limits_{t\geq 0} T(t)B_0$, acotado e invariante.*

- ◇ *C es compacto y atrayente.*

Entonces, para el conjunto límite

$$\omega(B_0) = \omega(\overline{B_0}) = \omega(C) \tag{1.17}$$

se cumple que

$$\omega(B_0) \text{ es compacto e invariante.} \tag{1.18}$$

Demostración. El conjunto $M = \bigcup_{t\geq 0} T(t)B_0$ es acotado e invariante. Por eso, el compacto atrayente C lo atrae, y en consecuencia la semidistancia $d_H(M, C) = d_H(T(t)M, C) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$. De este modo, no solo se cumple la igualdad $d_H(M, C) = 0$, sino también las inclusiones $C = \overline{C} \supset \overline{M} \supset \overline{B_0} \supset B_0$ y por tal motivo

$$\omega(C) \supset \omega(\overline{B_0}) \supset \omega(B_0)$$

(vea **1.1.3**). Por otro lado, B_0 absorbe al acotado C: *existe un tiempo t_0 a partir del cual $T(t)C \subset B_0$ para todo $t \geq t_0$*. Consecuentemente,

$$\omega(C) = \omega\big(T(t)C\big) \subset \omega(B_0).$$

Por lo tanto, se obtiene (1.17).

Para concluir basta observar que $\overline{\bigcup\limits_{t\geq 0} T(t)B_0}$ está incluido en el conjunto C. En este contexto, la proposición 1.2.9 implica (1.18) y concluye la demostración. ☐

Teorema 1.3.15 (Primer teorema de existencia)**.** *Si $T(\cdot)$ satisface las condiciones del lema 1.3.14, entonces el semigrupo tiene un atractor global $\mathcal{A} \subset X$. El atractor $\mathcal{A}$ queda definido por el conjunto $\omega-$límite de B_0, dado por la fórmula*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{s\geq 0} \mathcal{B}(s) \quad \textit{donde} \quad \mathcal{B}(s) = \overline{\left(\bigcup_{t\geq s} T(t)B_0\right)}.$$

Demostración. Para probar que el compacto invariante $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ es atrayente, se procederá por el absurdo, como en [10]. En otras palabras,

$$\mathcal{A} \text{ no atrae algún acotado } K \subset X.$$

Luego, existen $\delta > 0$, una sucesión $x_n \in K$ y $t_n \to +\infty$ de modo que

$$d_H(T(t_n)K, \mathcal{A}) \geq d(T(t_n)x_n, \mathcal{A}) \geq \delta.$$

Como B_0 es absorbente, existe $t_K \leq t_n$ a partir del cual $T(t_n)x_n \subset B_0$ y por la compacidad de $\overline{B_0}$ existe una subsucesión $T(t_{n_j})x_{n_j}$ que converge a $\beta \in \overline{B_0}$. Luego $\delta \leq \lim_{j\to+\infty} d(T(t_{n_j})x_{n_j}, \mathcal{A}) \leq \lim_{j\to+\infty}\{d(T(t_{n_j})x_{n_j}, \beta) + d(\beta, \mathcal{A})\}$, y por eso se cumple

$$\delta \leq d(\beta, \mathcal{A}). \tag{1.19}$$

Por otro lado, $\beta = \lim_{j\to+\infty} T(t_{n_j})x_{n_j} = \lim_{j\to+\infty} T(t_{n_j} - t_K)(T(t_K)x_{n_j})$. Como $t_{n_j} - t_K \xrightarrow{j\to+\infty} \infty$ y $T(t_K)x_{n_j} \in B_0$, (1.17) implica que $\beta \in \omega(\overline{B_0}) = \mathcal{A}$. Esta contradicción con (1.19) demuestra que el compacto invariante $\mathcal{A}$ atrae cualquier conjunto acotado de X. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un atractor global para $T(\cdot)$. $\square$

La siguiente es el primer resultado, en dimensión finita.

Corolario 1.3.16. *Si $X = \mathbb{R}^n$ y $T(\cdot)$ admite un conjunto compacto $B \subset \mathbb{R}^n$, absorbente y no–vacío. Entonces $\omega(B) \neq \emptyset$ es un atractor global.*

Demostración. Como B absorbe a cada acotado, existe t_B para el cual la condición $t \geq t_B$ es suficiente para obtener la inclusión $T(t)B \subset B$. Es decir,

$$\overline{\bigcup_{t\geq 0} T(t + t_B)B} \subset B.$$

En estas circunstancias, la compacidad de B y la proposición 1.2.9 muestran que $\omega(B)$ es un compacto invariante, no vacío. Para concluir basta observar que el compacto invariante $\omega(B)$ es atrayente. Esto se obtiene a partir de la prueba del teorema 1.3.15. Por lo tanto, $\omega(B) \neq \emptyset$ es un atractor global. $\square$

Corolario 1.3.17. *Si $X = \mathbb{R}^n$ y $T(\cdot)$ admite un subconjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$ que atrae a cada conjunto unitario de $\mathbb{R}^n$. Entonces B atrae a cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. En particular,*

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)C, B\big) = 0, \quad \forall C \subset \mathbb{R}^n, \text{ acotado.}$$

Demostración. Por cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(B) \text{ absorbe al conjunto } K.$$

Si $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)x, B\big) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ implica que alguna vecindad abierta de $x \in K$ es absorbida por $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$. Usando una cobertura finita del compacto K (con estas vecindades) se infiere que $\mathcal{O}_\varepsilon(B)$ absorbe K. Por (1.14), se obtiene que B atrae a cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

El conjunto B es atrayente, pues la clausura $\overline{C}$ de cada acotado es un compacto que satisface no solo la inclusión $\overline{T(t)C} \subset T(t)\overline{C}$ sino también (vea **1.1.3**)

$$d_H\big(T(t)C, B\big) = d_H\Big(\overline{T(t)C}, B\Big) \leq d_H\big(T(t)\overline{C}, B\big) \to 0.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

En el corolario1.3.17 se observa que si B es un conjunto compacto e invariante bajo $T(\cdot)$, este es el atractor global del sistema. Además, se presentan ejemplos que exhiben un atractor global.

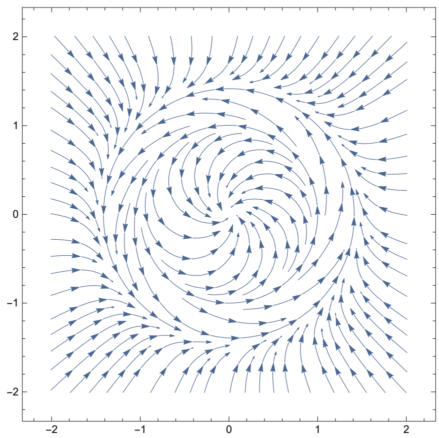

Figura 1.2: Retrato de fase del ejemplo 1.3.18

Ejemplo 1.3.18. *El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + (x^2+y^2-1)(2-x^2-y^2)x, \\ \dot{y} &= x + (x^2+y^2-1)(2-x^2-y^2)y. \end{cases}$$

esta definido en $\mathbb{R}^2$*. Las ecuaciones de este sistema están dadas por funciones que son continuamente diferenciables (y así el campo vectorial es localmente lipschitz), por tal razón el semigrupo* $T(\cdot)$ *está bien definido a partir del flujo inducido del sistema, que será completo cuando el dominio es un compacto, como* $[-2,2]\times[-2,2]$*. En este caso, el disco*

$$D_{\sqrt{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x,y) \| \leq \sqrt{2}\}$$

de la figura 1.2, es un conjunto compacto e invariante bajo $T(\cdot)$ *que atrae a cada conjunto unitario de* $\mathbb{R}^2$, *por lo tanto el disco* $D_{\sqrt{2}}$, *será el atractor global del sistema.*

El siguiente ejemplo permite utilizar la teoría presentada para analizar un sistema de ecuaciones, ampliamente estudiado. La presentación ha sido tomada de [34] y también aparece en [16]. Cabe mencionar que el libro [2] tiene una presentación útil y amena de un estudio íntimamente ligado al llamado atractor de Lorenz.

Ejemplo 1.3.19 (Atractor de Lorenz)**.** *Las ecuaciones de Lorenz son:*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz; \end{cases} \tag{1.20}$$

donde σ*,* r *y* b *constantes positivas. El sistema* (1.20) *genera un semigrupo que posee un atractor global. Para obtener la existencia del atractor global se sigue la caracterización dada en [16, 34]. Basta mostrar que una esfera suficientemente grande y centrada en el punto* $(0,0,r+\sigma)$ *limita un compacto absorbente que satisface las condiciones del corolario 1.3.16. La derivada de la función (distancia)* $V(x,y,z) = x^2+y^2+(z-r-\sigma)^2$ *a lo largo de las soluciones de* (1.20) *satisface*

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z-r-\sigma)\dot{z} \\ &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2b(r+\sigma)z. \end{aligned}$$

Como $-2bz(r+\sigma) = b(z-(r+\sigma))^2 - bz^2 - b(r+\sigma)^2$ *se cumple*

$$\frac{dV}{dt} = -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2b(r+\sigma)z \le -mV + b(r+\sigma)^2,$$

donde $m = \text{mín}\{2\sigma, b, 2\}$. *Por un cálculo directo se obtiene*

$$V(t) \le \left(V_0 + \frac{b(r+\sigma)^2(e^{mt}-1)}{m}\right)e^{-mt} \le V_0 e^{-mt} + \frac{2b(r+\sigma)^2}{m}.$$

Del corolario 1.3.16 y del corolario 1.3.17 se infiere la existencia del atractor global.

1.3.1 Disipatividad y existencia

Para describir mejor la existencia del atractor global, se presenta la disipatividad por medio de la definición de atrayente. Los semigrupos que poseen un conjunto absorbente acotado con frecuencia son llamados *disipativos*; pero existen algunas variantes[8]. Esto se uniformiza en las siguientes definiciones, necesarias para describir algunos resultados útiles que garantizan la existencia del atractor global de un determinado semigrupo. Las principales referencias que se han utilizado son [10, 5].

1.3.20. Sea S, una colección de subconjuntos del espacio X. El semigrupo $T(\cdot)$ es **disipativo por** S si existe un conjunto acotado $B \subset X$ que atrae a todos los elementos de S. Es decir

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)A, B\big) = 0, \quad \forall A \in S.$$

Por ejemplo, de acuerdo a [17, sección 3.4] se obtiene:

- $S = \big\{\{x\} : x \in X\big\} \implies T(\cdot)$ es **disipativo por puntos**.
- $S = \{K : K \text{ es compacto }\} \implies T(\cdot)$ es **disipativo por compactos**.
- $S = \{K : K \text{ es acotado}\} \implies T(\cdot)$ es **disipativo por acotados**.

[8]Por ejemplo, (1.16) es una caracterización de los operadores lineales disipativos. Una adecuada discusión en la terminología y algunos conceptos generales aparece en [32].

En el corolario 1.3.17 se describe una relación entre estos tipos de disipatividad para semigrupos en espacios euclidianos, donde las sucesiones de un compacto siempre son acotadas y admiten subsucesiones que convergen hacia algún elemento del compacto. En este contexto, la siguiente condición técnica es de gran utilidad para comparar de manera razonable tales tipos de disipatividad.

Definición 1.3.21. *El semigrupo $T(\cdot)$ se dice que es* ***asintóticamente compacto*** *si cada sucesión acotada $x_k \in X$ satisface lo siguiente: por cada sucesión $t_k \geq 0$ con $\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, se obtiene que la sucesión inducida $T(t_k)x_k$ admite una subsucesión convergente.*

Con el objeto de aclarar y explicar mejor este concepto, se presenta el siguiente ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.3.22. *El semigrupo $T(\cdot)$ en $X = \mathbb{R}^n$ para el cual la órbita de cada conjunto acotado es acotada (semigrupo acotado) es un ejemplo natural de un semigrupo asintóticamente compacto.*

Se describen algunas propiedades básicas de los conjuntos límite de un semigrupo asintóticamente compacto (vea proposición 1.2.9).

Proposición 1.3.23. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo asintóticamente compacto. Si $B \subset X$ es no vacío, su conjunto $\omega-$límite satisface lo siguiente:*

(a) $\omega(B)$ es no vacío, atrae a B, y es compacto e invariante.

(b) $\omega(B)$ es el menor compacto de X que atrae a B.

Demostración. Para las sucesiones acotadas $x_n \in B$, se cumple que $T(t_n)x_n$ admite una subsucesión convergente cuando $0 \leq t_n \to +\infty$. Es decir

$$d\big(T(t_{n_k})x_{n_k}, \omega(B)\big) \to 0, \quad \text{cuando} \quad k \to +\infty. \tag{1.21}$$

En otras palabras, el límite de $T(t_{n_k})x_{n_k}$ pertenece a $\omega(B)$ y así $\omega(B) \neq \emptyset$. Para ver que $\omega(B)$ atrae a B, se procede por contradicción; la existencia de $\varepsilon > 0$ y las sucesiones $0 \leq t_n \to +\infty$ y $x_n \in B$ tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) = d_H(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

genera una contradicción con (1.21) y demuestra que $\omega(B)$ atrae al conjunto B. Para obtener la compacidad de $\omega(B)$, se considera $y_k \in \omega(B)$ y se seleccionan $x_k \in B$ y $t_k \geq 0$ tal que $d(T(t_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}$. Como $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto, $\{T(t_k)x_k\}$ tiene una subsucesión que converge a un elemento $y \in \omega(B)$ que satisface

$$d(y_{k_r}, y) \leq d(T(t_{k_r})x_{k_r}, y_{k_r}) + d(T(t_{k_r})x_{k_r}, y) < \frac{1}{k_r} + \epsilon.$$

Es decir, $y_k \in \omega(B)$ tiene una subsucesión que converge a $y \in \omega(B)$ y se obtiene la compacidad de $\omega(B)$. La invarianza de $\omega(B)$ se obtiene de (1.6) y del corolario 1.2.6. Por lo tanto (a) es verdadero.

Para obtener (b), se considera un conjunto compacto $F \subset X$ que atrae a B y $y \in \omega(B)$ (i.e., $y = \lim_{k\to\infty} T(t_k)x_k$ con $x_k \in B$ y $0 < t_k \to \infty$, Lema 1.2.4). Para $f \in F$ con $d(y, F) = d(y, f)$ se cumple

$$\begin{aligned} d(y, F) &\leq d(y, T(t_k)x_k) + d(T(t_k)x_k, f) \\ &\leq d(y, T(t_k)x_k) + d(T(t_k)x_k, F) \\ &\leq d(y, T(t_k)x_k) + d_H(T(t_k)x_k, F) \to 0. \end{aligned}$$

En otras palabras $y \in F$. Por lo tanto, $\omega(B) \subset F$ y se obtiene (b). □

Se tienen las condiciones para enunciar un resultado sencillo pero ilustrativo sobre los atractores globales. En este teorema se sigue la presentación de [10], donde además se pueden encontrar condiciones más generales y completas sobre la existencia del atractor global de un semigrupo. Este libro es una de las principales referencias de la presente tesis y de la moderna teoría de los sistemas dinámicos inducidos por semigrupos[9].

Teorema 1.3.24 (Segundo teorema de existencia)**.** *Cada semigrupo $T(\cdot)$ disipativo por acotados y asintóticamente compacto admite al conjunto cerrado*

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_B \left\{\omega(B) : B \subset X, B \text{ es acotado}\right\}}$$

como un atractor global.

[9]En [10] también se consideran los procesos, una generalización natural de los semigrupos.

Demostración. El conjunto cerrado $\mathcal{A}$ satisface

$$T(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}, \text{ por cada } t \geq 0. \tag{1.22}$$

En efecto, dado $x_0 \in \mathcal{A}$, existe $x_n \in \omega(B_n)$ con B_n acotado y $x_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Luego $T(t)x_n = y_n \to T(t)x_0$ cuando $n \to +\infty$. Como $\omega(B_n) \subset \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$, la relación (1.6) muestra que $T(t)x_0 \in \mathcal{A}$ y así (1.22) es verdadero. Análogamente:

$$T(t)\mathcal{A} \supset \mathcal{A}, \text{ para cada } t \geq 0. \tag{1.23}$$

En efecto, cuando $y_0 \in \mathcal{A}$, existe $y_n \in \omega(B)$ con B acotado y $y_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Por la invarianza de $\omega(B)$ cada $y_n = T(t)x_n$ con $x_n \in \omega(B)$. Por la compacidad de $\omega(B)$, existe una subsucesión x_{n_j} que converge a algún $x_0 \in \omega(B) \subset \mathcal{A}$. Luego

$$T(t)x_0 = \lim_{j\to\infty} T(t)x_{n_j} = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0 \in T(t)\mathcal{A}.$$

A partir de esto se obtiene (1.23). Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es invariante.

Para obtener que el conjunto $\mathcal{A}$ es acotado, se considera un acotado B_0 que atrae a cada acotado ($T(\cdot)$ es disipativo por acotados):

$$d_H\big(T(t)D, B_0\big) \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty, \quad \text{para todo acotado } D \subset X.$$

Es decir, cada D satisface $\omega(D) \subset \overline{B_0}$ y por la construción se concluye que $\mathcal{A} \subset \overline{B}$ es acotado.

Para probar la compacidad del conjunto invariante $\mathcal{A}$ se considera $x_n \in \mathcal{A}$; como $\mathcal{A}$ es invariante, $x_n = T(n)y_n$ con y_n en el acotado $\mathcal{A}$. Por la compacidad asintótica del semigrupo, $T(n)y_n = x_n$ tiene una subsucesión que converge a un límite que está en el cerrado $\mathcal{A}$. Luego $\mathcal{A}$ es compacto. Finalmente se prueba que $\mathcal{A}$ atrae a cada acotado $B \subset X$. Por la proposición 1.3.23

$$d_H(T(t)B, \omega(B)) \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Como $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ implica $d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \leq d_H(T(t)B, \omega(B))$ se concluye que $\mathcal{A}$ atrae a cada subconjunto acotado de X. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{A}$ es un atractor global. □

Hay casos de semigrupos no lineales con un atractor global que son sencillos de entender. Por ejemplo, a partir de las definiciones presentadas se puede ver que la existencia del atractor global es suficiente para que el semigrupo sea disipativo por acotados y asintóticamente compacto. Una descripción útil de estos conceptos también aparece dentro del primer capítulo de la tesis [30]. Cabe mencionar que en esta tesis doctoral no solo se presentan una útil descripción de la teoría, sino también se introduce una generalización de la descomposición de Morse del atractor global. En el próximo capítulo se presenta la clásica descomposición de Morse y se analiza su utilidad para describir a los sistemas gradientes.

Proposición 1.3.25. *Si $T(\cdot)$ es disipativo por compactos y, también, es asintóticamente compacto, entonces $T(\cdot)$ es disipativo por acotados.*

Demostración. Se observa inicialmente que existe un conjunto acotado B para el cual el siguiente límite $\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)M, B\big) = 0$, para todo compacto $M \subset X$. Para este B se cumple

$$\omega(D) \subset B, \text{ para todo acotado } D \subset X. \tag{1.24}$$

En efecto, considere un elemento $y \in \omega(D)$ (i.e., $y = \lim_{r\to\infty} T(t_r)x_r$ con $x_r \in D$ y $0 < t_r \to \infty$). Como el semigrupo $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto, existe $s_r > 0$ con $s_r \to +\infty$ y $t_r - s_r \to +\infty$ de modo que la sucesión $T(s_r)x_r$ tiene una subsucesión convergente. Es decir, existe el conjunto compacto

$$K = \big\{T(s_{r_j})x_{r_j} : j \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{\lim_{j\to\infty} T(s_{r_j})x_{r_j}\big\},$$

y por cada $\varepsilon > 0$ existe $n_K \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(T(t)K, B) < \varepsilon$ si $t \geq n_K$. Usando subsucesiones con $t_{r_i} - s_{r_i} \geq n_K$ se cumple $d_H(T(t_{r_i} - s_{r_i})K, B) < \varepsilon$ y por consiguiente

$$d(T(t_{r_i} - s_{r_i})(T(s_{r_i})x_{r_i}), B) = d(T(t_{r_i})x_{r_i}, B) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $d(y, B) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, es decir $y \in B$ y se cumple (1.24).

Para concluir basta observar que $d_H(T(t)D, B) \leq d_H(T(t)D, \omega(D))$ y $\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)D, \omega(D)\big) = 0$ (vea (1.24) y proposición 1.3.23). Por lo tanto, B atrae a cada acotado D y $T(\cdot)$ es disipativo por acotados. □

Corolario 1.3.26. *Si $T(\cdot)$ es disipativo por puntos y asintóticamente compacto, entonces tiene un atractor global.*

Demostración. Por el estudio de la topología del espacio métrico es posible ver que el semigrupo disipativo por puntos satisface lo siguiente

$$T(\cdot) \text{ es disipativo por compactos.}$$

Por la proposición 1.3.25, el semigrupo es disipativo por acotados. Por lo tanto, el corolario se obtiene a partir del teorema 1.3.24. □

1.3.2 Órbitas en un compacto invariante

Se describen las órbitas de algún conjunto compacto que es invariante por la acción del semigrupo. Se presenta la proposición 1.3.31 y de ese modo se caracterizan a los atractores globales por medio de las soluciones globales (vea **1.3.28**). Para ser más precisos, se muestra que cada atractor global del semigrupo es igual al conjunto de todas la soluciones globales y acotadas, tal como también se demuestra en el primer capítulo de [30]. Para lograr este objetivo se introduce el concepto de *solución global* y con eso se presentará el conjunto $\alpha-$límite inducido por una solución global. Antes de formalizar estos conceptos y dar la descripción precisa, se introduce la siguiente construcción que busca motivar la definición de solución global y del conjunto $\alpha-$límite.

Observación 1.3.27. *Sea x un elemento de X, que es el espacio donde está definido $T(\cdot)$. En este contexto, la función $\xi_x^+ : [0, \infty) \to X$ definida por medio de la regla $\xi_x^+(t) = T(t)x$ es continua. Además, las propiedades básicas del semigrupo garantizan que esta función ξ_x^+ no solo satisface $\xi_x^+(0) = x$ sino también*

$$T(t)\xi_x^+(s) = \xi_x^+(t + s), \quad \forall s, t \in [0, +\infty).$$

Por otro lado, la caracterización del lema 1.2.4, para el conjunto unitario $E = \{x\}$ *asegura que el conjunto límite* $\omega(E) = \omega(x)$ *se puede expresar usando las sucesiones, de la siguiente manera.*

$$\omega(x) = \left\{y \in X : \exists\, 0 < t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \text{ con } \lim_{k\to\infty} \xi_x^+(t_k) = y\right\}.$$

Por lo tanto,

$$t \geq 0 \Rightarrow \omega(x) = \omega\big(T(t)x\big).$$

Se definirá un nuevo concepto asintótico cuando se admite la existencia de la llamada solución global que se presenta a continuación.

1.3.28. Una **solución global** (trayectoria invariante) para un semigrupo $T(\cdot)$ en X es una función continua $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ para la cual se exige la siguiente condición.

$$T(t)\xi(s) = \xi(t+s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

En este contexto, — de modo coherente con la clásica teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, que describe un problema de Cauchy — se dice que la solución global **pasa por** $x \in X$ cuando $\xi_x : \mathbb{R} \to X$ es una solución global que además satisface la igualdad $\xi_x(0) = x$. En consecuencia, cuando el elemento $x \in X$ admite una solución ξ_x, que pasa por x, su correspondiente conjunto $\alpha-$**límite** se define como la colección.

$$\alpha(\xi_x) = \left\{y \in X : \exists\, 0 < t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \text{ con } \lim_{k\to\infty} \xi_x(-t_k) = y\right\}. \tag{1.25}$$

De modo semejante, la **órbita completa de** x (o simplemente **órbita de** x) viene dada por la imagen de la respectiva solución global

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \xi_x(t)$$

(vea **1.2.1, 1.3.28** y la observación 1.3.27). Después de todas estas precisiones vale la pena aclarar que a partir de cada definición, no solo se obtiene la siguiente propiedad

$$\xi_x(t) = T(t)x, \quad \forall t \geq 0,$$

sino también se garantiza la unicidad de la órbita positiva. Por otro lado, la continuidad del semigrupo garantiza que el conjunto $\alpha(\xi_x)$ sea positivamente invariante.

$$T(t)\alpha(\xi_x) \subset \alpha(\xi_x), \quad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{1.26}$$

Es más, para cada parámetro $t \geq 0$, la regla $\mathbb{R} \ni s \mapsto \xi_x(t+s) \in X$ genera una solución global que pasa por $T(t)x$. Es decir

$$\xi_x(\cdot + t) = \xi_{T(t)x}(\cdot), \quad \text{cuando} \quad t \geq 0. \tag{1.27}$$

Proposición 1.3.29. *Sea $S_{\mathcal{A}}$ un compacto e invariante bajo $T(\cdot)$.*

(a) Si $x \in S_{\mathcal{A}}$ entonces existe una solución global que pasa por x.

(b) Si $y \in S_{\mathcal{A}}$, el conjunto $\alpha(\xi_y)$ es compacto, invariante y no vacío.

(c) Si $\xi_x = \xi$ es una solución global que pasa por $x \in X$ entonces $\overline{\xi_x(\mathbb{R})}$ es igual a $\xi(\mathbb{R}) \cup \alpha(\xi_x) \cup \omega(x)$.

Demostración. En (a), se elige un elemento $x \in S_{\mathcal{A}}$.

(a.1) Existe una función continua $\xi_x : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}} \subset X$ con $x = \xi_x(0)$ de modo que $T(t)\xi(s) = \xi(t+s)$ para todo $s, t \in [0, +\infty)$.

En efecto, esta función $\xi_x : \mathbb{R} \to X$ se construye de la siguiente manera[10]. Si $t \geq 0$, se hace $\xi_x(t) = T(t)x$ (por la invarianza de $S_{\mathcal{A}} \ni x$, $\xi_x(t) \in S_{\mathcal{A}}$). Si $t < 0$, se procede inductivamente, para lo cual se observa que $T(1)S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}}$ garantiza la existencia de $\xi_x(-1) \in S_{\mathcal{A}}$ tal que $T(1)\xi_x(-1) = \xi_x(0)$ y así se define $\xi_x(t) = T(t+1)\xi_x(-1) \in S_{\mathcal{A}}$ para $-1 \leq t < 0$. Análogamente, existe $\xi_x(-2) \in S_{\mathcal{A}}$, tal que $T(1)\xi_x(-2) = \xi_x(-1)$ con lo cual se define $\xi_x(t) = T(t+2)\xi_x(-2) \in S_{\mathcal{A}}$ para $-2 \leq t < -1$. Con este procedimiento, se obtiene una función continua $\xi_x : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}} \subset X$

[10]Esta construcción aparece en la prueba de la proposición 1.3 de [5, capítulo 3]. Se usa la invarianza del conjunto, sin necesidad de la compacidad.

que se escribe:

$$\xi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, & t \geq 0 \\ T(t+1)\xi_x(-1), & -1 \leq t < 0 \\ T(t+2)\xi_x(-2), & -2 \leq t < -1 \\ \vdots & \\ T(t+n)\xi_x(-n), & -n \leq t < -(n-1) \\ \vdots & \end{cases} \tag{1.28}$$

Por tanto, se cumple (a.1) (su última afirmación sigue de la observación 1.3.27).

(a.2) La función continua de (a.1), satisface

$$T(t)\xi_x(s) = \xi_x(t+s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Por lo tanto, ξ_x es una solución global que pasa por x.

Si $s \geq 0$ entonces $\xi_x(s) = T(s)x$ y $T(t)\xi_x(s) = T(t)T(s)x = T(t+s)x = \xi_x(t+s)$ para cada $t \geq 0$. Por otro lado, cuando no existe restricciones de signo en el parámetro, es decir cuando $s \in \mathbb{R} \cap [-n, -(n-1))$ con $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\xi_x(s) = T(s+n)\xi_x(-n)$. Además, si $t \geq 0$ se cumple

$$T(t)\xi_x(s) = T(t)T(s+n)\xi_x(-n) = T(t+s+n)\xi_x(-n) = \xi_x(t+s).$$

Por tanto, ξ_x es la solución global que pasa por x.

El ítem (b) se obtiene como en la proposición 1.2.9.

La prueba de (c) se hace por doble inclusión. Para obtener

$$\overline{\xi(\mathbb{R})} \subset \xi(\mathbb{R}) \cup \alpha(\xi_x) \cup \omega(x)$$

basta observar que cada elemento $y \in \overline{\xi(\mathbb{R})}$ induce una sucesión $t_n \in \mathbb{R}$ con $\lim_{n\to+\infty} \xi(t_n) = y$. Usando una subsucesión si es necesario, se obtienen los tres casos siguientes: (c.1) Si $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ entonces $y \in \omega(x)$. (c.2) Si $\lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty$ entonces $y \in \alpha(\xi_x)$. (c.3) Si $\lim_{n\to+\infty} t_n = t \in \mathbb{R}$ entonces la continuidad de ξ implica $\xi(t) = y \in \xi(\mathbb{R})$. Esto demuestra la inclusión anterior. La otra inclusión

$$\overline{\xi(\mathbb{R})} \supset \xi(\mathbb{R}) \cup \alpha(\xi_x) \cup \omega(x),$$

sigue directamente de las definiciones. El ítem (c) es verdadero. □

1.3.30. Para el útil y peculiar caso de los semigrupos que son asintóticamente compactos, las soluciones globales ξ generan un conjunto límite $\alpha(\xi) \neq \emptyset$. Además, $\alpha(\xi)$ no solo es compacto e invariante, como en la proposición anterior, sino también será un conjunto conexo para el cual se cumple la siguiente convergencia:

$$\lim_{t\to+\infty} d\big(\xi(-t), \alpha(\xi)\big) = 0.$$

Esto se relaciona con las propiedades topológicas del lema 2.1.12.

La siguiente proposición caracteriza cada atractor global por medio de todas las soluciones globales y acotadas del sistema.

Proposición 1.3.31. *Si $T(\cdot)$ tiene un atractor global $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ está formado por todos los elementos $y \in X$ para los cuales existe una solución global $\xi\colon \mathbb{R} \to X$, acotada con $\xi(0) = y$.*

Demostración. Si $y \in \mathcal{A}$, la proposición 1.3.29 induce una solución global que pasa por $y = \xi(0)$, consecuentemente $\xi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, el atractor global está incluido en el siguiente conjunto

$$\{y \in X : \exists\ \xi : \mathbb{R} \to X, \text{una solución global acotada con } \xi(0) = y\} = B.$$

Para probar que el conjunto $B \subset \mathcal{A}$, basta observar que $\mathcal{A}$ atrae a la órbita acotada $Y = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \xi(t)$, con $y = \xi(0) \in B$. Es decir $\lim\limits_{t\to\infty} d_H(T(t)Y, \mathcal{A}) = 0$, donde $d_H(T(t)Y, \mathcal{A})$ es igual a $\sup\limits_{\xi(s)\in Y} d(T(t)\xi(s), \mathcal{A})$, para todo $s \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$. Para $s = t = 0$ se tiene $T(0)\xi(0) = y$, y se cumple $d(y, \mathcal{A}) \leq d_H(T(t)Y, \mathcal{A})$ luego

$$d(y, \mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} d(y, \mathcal{A}) \leq \lim_{t\to\infty} d_H(T(t)Y, \mathcal{A}) = 0.$$

Es decir $d(y, \mathcal{A}) = 0$ y así $y \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $B \subset \mathcal{A}$ y se concluye. $\square$

Observación 1.3.32. *Para el ejemplo 1.3.18, el disco*

$$D_{\sqrt{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\| (x, y) \|\leq \sqrt{2}\}$$

es un atractor global. Por lo tanto, de la proposición 1.3.31 se infiere que este disco está formado por todas las soluciones globales acotadas del sistema (vea figura 1.2).

1.4 El Atractor local débil, su repulsor y la descomposición de Morse

Se describe la estructura interna de un conjunto invariante que admite alguna propiedad adicional, por medio de la cual es posible dar un detallado análisis de la dinámica interna de este compacto invariante [23]. Inicialmente se presentan los atractores locales, su respectivo repulsor y sus propiedades (teorema 1.4.4). Con la ayuda de las parejas de atractores locales y sus repulsores, se introduce la llamada descomposición de Morse de un invariante (definición 1.4.7), caracterizado en el teorema 1.4.14. Se concluye con una descripción del comportamiento dinámico de un compacto invariante que admite tal descomposición (proposición 1.4.11), como los atractores globales.

1.4.1 Atractor local débil y su repulsor asociado

1.4.1. Los conceptos de atractor débil y repulsor son útiles para estudiar un atractor global [36]. Inicialmente se define el atractor local débil. Para tal fin se considera $S_{\mathcal{A}} \subset X$ un subconjunto (no-vacío) compacto e invariante respecto al semigrupo $T(\cdot)$ de X. Se dice que el conjunto $A \subset S_{\mathcal{A}}$ es un **atractor local débil** (en $S_{\mathcal{A}}$) cuando existe una constante positiva $\varepsilon > 0$ para la cual se verifica

$$\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A. \tag{1.29}$$

El **repulsor** (relativo a $S_{\mathcal{A}}$) asociado al atractor local $A \subset S_{\mathcal{A}}$ es el conjunto dado por los elementos $x \in S_{\mathcal{A}}$ para los cuales su respectivo conjunto $\omega-$ límite es disjunto de A. Es decir,

$$A^* = \big\{x \in S_{\mathcal{A}} : \omega(x) \cap A = \emptyset\big\}. \tag{1.30}$$

En ese contexto, al par ordenado (A, A^*) se le denomina: **pareja atractor-repulsor**, respecto a $S_{\mathcal{A}}$. Note que el conjunto vacío y el propio $S_{\mathcal{A}}$ satisfacen trivialmente (1.29).

La siguiente es la primera observación básica de A y A^*.

Observación 1.4.2. *La proposición 1.2.9 muestra que*

$$\omega(E) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\geq s} T(t)E \Big)}$$

es compacto cuando E es parte de algún conjunto compacto invariante. De este modo, cada atractor local débil $A \subset S_{\mathcal{A}}$ es un compacto invariante y disjunto[11] *de su repulsor asociado $A^* \subset S_{\mathcal{A}}$ (basta usar $A = \omega(A)$ en el apartado* **1.2.5** *y que $\omega(x) \neq \emptyset, \forall x \in S_{\mathcal{A}}$).*

Proposición 1.4.3. *Sea (A, A^*), una pareja atractor-repulsor para $T(\cdot)$, respecto a $S_{\mathcal{A}}$.*

(a) Si $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A$ y $0 < \delta < \varepsilon$, existe $t_0 = t_0(\delta) \geq 0$ tal que

$$\Big(t \geq t_0 \quad y \quad x \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\Big) \quad \Rightarrow \quad T(t)x \in \mathcal{O}_\delta(A).$$

(b) Si $B = \overline{B}$ y $B \cap A = \emptyset$ entonces por cada $\epsilon > 0$ existe $t_0 = t_0(\epsilon)$ tal que

$$\Big(x \in S_{\mathcal{A}}, \quad t \geq t_0 \quad y \quad T(t)x \in B\Big) \quad \Rightarrow \quad d(x, A^*) < \epsilon.$$

Demostración. Para probar el ítem (a) se asume, por contradicción, que existe una constante positiva $0 < \delta < \varepsilon$ para la cual no se cumple la primera parte de la proposición, es decir

$$\forall t_0 > 0 \Rightarrow \exists\big(\tilde{t}_0 \geq t_0 \wedge \tilde{x} \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \text{ tal que } T(\tilde{t}_0)\tilde{x} \notin \mathcal{O}_\delta(A). \tag{1.31}$$

En (1.31), la definición (1.29) hace posible construir las sucesiones $t_n \geq 0$ y $x_n \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}$, ambas con los siguientes requerimientos:

$$t_n \to +\infty, \quad T(t_n)x_n \notin \mathcal{O}_\delta(A) \quad y \quad d(T(t_n)x_n, A) = \delta > 0.$$

En este contexto, la invarianza y la compacidad del conjunto $S_{\mathcal{A}}$ garantizan la existencia del siguiente límite.

$$x = \lim_{k\to+\infty} T(t_{n_k})x_{n_k} \in S_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{O}_\delta(A),$$

con $n_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$.

[11]En el teorema 1.4.4 se verá que cada pareja atractor-repulsor está formada por compactos que son invariantes y disjuntos.

Por otro lado, como la sucesión $t_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$ y cada $x_{n_k} \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}$, el Lema 1.2.4, que caracteriza el conjunto límite por sucesiones, muestra que

$$x \in \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A.$$

Esta es una contradicción. Por lo tanto, las afirmaciones del ítem (a) son verdaderas.

En la prueba de (b) también se procede por contradicción. Existe un cerrado B, disjunto de A y algún $\epsilon > 0$ para el cual no se satisface la segunda parte de la proposición:

$$\forall t_0 > 0 \Rightarrow \exists\big(\tilde{t}_0 > t_0 \wedge \tilde{x} \in S_{\mathcal{A}}\big) \text{ tal que } T(\tilde{t}_0)\tilde{x} \in B \text{ pero } d(\tilde{x}, A^*) \geq \epsilon.$$

Estas condiciones inducen dos sucesiones $t_n \to +\infty$ y $x_n \in S_{\mathcal{A}}$ que satisfacen

$$T(t_n)x_n \in B \quad y \quad d(x_n, A^*) \geq \epsilon, \quad \forall n. \tag{1.32}$$

Sin pérdida de generalidad, se asume que x_n es convergente, en consecuencia

$$\exists\, x = \lim_{n\to\infty} x_n \in S_{\mathcal{A}} \quad y \quad d(x, A^*) \geq \epsilon.$$

Por la definición dada en (1.30), la intersección $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$; luego para la constante $\varepsilon > 0$ de (1.29) existe $t_1 > 0$ para el cual $T(t_1)x \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}$, ($x \in S_{\mathcal{A}}$ implica $\{T(t)x : t \geq 0\} \subset S_{\mathcal{A}}$). Además, por la continuidad de $T(t_1)$ genera un número $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T(t_1)x_{m+n} \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}, \quad \forall n.$$

Con esto se puede aplicar la primera parte de la proposición para algún $0 < \delta < \varepsilon$ con $\mathcal{O}_\delta(A) \subset X \setminus B$ y encontrar $t_0 = t_0(\delta)$ tal que

$$t > t_0 + t_1 \Rightarrow T(t)x_{m+n} \in \mathcal{O}_\delta(A), \quad \forall n.$$

En particular, para algún $n_0 > 0$ con $t = t_{m+n_0} > t_0 + t_1$ (pues $t_n \to \infty$):

$$T(t_{m+n_0})x_{m+n_0} \in X \setminus B.$$

Esta contradicción con (1.32) concluye la demostración de (b). Por tanto la proposición es verdadera. $\square$

El siguiente resultado aparece en el último capítulo de [36]. Es necesario señalar que la proposición 1.3.29 garantiza que cada elemento $x \in S_{\mathcal{A}}$ admite una solución global que pasa por x, en la cual su conjunto $\alpha-$límite es compacto, invariante y no vacío (vea (1.25)).

Teorema 1.4.4. *Sea (A, A^*) una pareja atractor-repulsor para $T(\cdot)$, respecto a $S_{\mathcal{A}}$, entonces*

(a) Los conjuntos A y A^* son disjuntos, compactos e invariantes.

(b) Sea $\xi_x = \xi : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ la solución global que pasa por $x \in S_{\mathcal{A}}$, las siguientes implicaciones son válidas:

(i) Si $x \in A^*$ o la intersección $\omega(x) \cap A^* \neq \emptyset$ entonces $\xi(\mathbb{R}) \subset A^*$.

(ii) Si $\alpha(\xi) \cap A \neq \emptyset$ entonces $\xi(\mathbb{R}) \subset A$.

(iii) Si $x \notin A \cup A^*$ entonces $A^* \supset \alpha(\xi)$ y $\omega(x) \subset A$.

Demostración. En (a), la observación inicial es que el conjunto límite $\omega(x) = \omega\big(T(t)x\big), \forall t \geq 0$ y $\forall x \in S_{\mathcal{A}}$. A partir de aquí, la definición del repulsor, muestra que se cumple la siguiente inclusión $T(t)A^* \subset A^*$, sin restricción en el parámetro $t \geq 0$. Recíprocamente, si se admite que el elemento $x \in A^*$ y el parámetro $t \geq 0$, la solución global $\xi_x : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ que pasa por x satisface $\xi_x(-t) \in S_{\mathcal{A}}$ y $\omega(x) = \omega(\xi_x(-t))$, y por eso la imagen $\xi_x(-t) \in A^*$. En esta imagen, al aplicar $T(t)$ la exigencia para ser solución garantiza que $T(t)\big(\xi_x(-t)\big) = \xi_x(0) = x$, de aquí se obtiene la otra inclusión $A^* \subset T(t)A^*$. Se concluye, así, que

$$A^* \text{ es invariante.} \tag{1.33}$$

Para ver la compacidad del repulsor, bastará mostrar que es un conjunto cerrado, por eso se considera una sucesión convergente, es decir $A^* \ni x_n \to x \in S_{\mathcal{A}}$. En estas condiciones, se concluye que $\omega(x) \cap A = \emptyset$ pues de lo contrario algún x_m estará en $\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}$ lo cual implicará que $\omega(x_m) \cap A \neq \emptyset$, contradiciendo que cada $x_n \in A^*$. Es decir, A^* es un subconjunto cerrado del compacto invariante $S_{\mathcal{A}}$ y así

$$A^* \text{ es compacto.} \tag{1.34}$$

Por lo tanto, la observación 1.4.2 junto a las afirmaciones (1.33) y (1.34) demuestran el ítem (a).

Para probar (i), se observa inicialmente que en la hipótesis bastará considerar la intersección pues de lo contrario se tiene $x \in A^*$. En estas condiciones, la inclusión $\xi(\mathbb{R}) \subset A^*$ sigue de la invarianza del conjunto compacto A^*. Se elige un elemento $z \in \omega(x) \cap A^*$. Por las propiedades usuales del conjunto límite, existe una sucesión $0 < r_k \to +\infty$ para la cual se cumple $T(r_k)x = T(r_k)\xi(0) = \xi(r_k) \to z \in A^*$ cuando $k \to \infty$. Consecuentemente, la siguiente afirmación, necesaria para la demostración, es verdadera.

(b.1) Si la constante $\beta > 0$, satisface la igualdad $d(A, A^*) = 2\beta > 0$ entonces existe k_0 tal que

$$k \geq k_0 \quad \Longrightarrow \quad \xi(r_k) \in \overline{\mathcal{O}_\beta(A^*)} = B.$$

En estas circunstancias, para cada parámetro $t \in \mathbb{R}$, no solo la imagen $\xi(t)$ pertenece a $S_\mathcal{A}$, sino también existe r_j, de la sucesión anterior, que supera al parámetro $r_j > t$, luego $T(r_j - t)\xi(t) = \xi(r_j) \in B$ para j suficientemente grande. De este modo, la proposición 1.4.3 implica la siguiente desigualdad $d(\xi(t), A^*) < \tilde{\beta}, \forall 0 < \tilde{\beta} < \beta$. En consecuencia, $\xi(t) \in A^*, \forall t \in \mathbb{R}$. Esto concluye la demostración del ítem (i).

Para establecer (ii), en el atractor local se elige un elemento $z \in \alpha(\xi)$ que también verifica $z \in \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_\mathcal{A}\big)$, donde $\varepsilon > 0$ cumple (1.29). Existe una sucesión divergente $0 < t_k \to \infty$ para la cual ocurre la convergencia del siguiente límite $\lim\limits_{k\to\infty} \xi(-t_k) = z \in A$. De aquí se infiere que la imagen $\xi(-t_k) \in \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_\mathcal{A}$, para k suficientemente grande. Así, cuando el parámetro $t \in \mathbb{R}$, para k suficientemente grande se tiene $t_k + t > 0$ y así está bien definida la función contínua $T(t_k + t)$. Esta función, al ser usada con la solución global resulta $T(t_k+t)\xi(-t_k) = \xi(t)$, y en consecuencia $\lim\limits_{k\to\infty} T(t_k + t)\xi(-t_k) = \xi(t) \in \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_\mathcal{A}\big) = A$. Como t es arbitrario, se obtiene que toda la órbita $\xi(\mathbb{R})$ esta incluida en el atractor local A. Esto demuestra el ítem (ii).

Para probar (iii) se observa primeramente que la condición dada $x \notin (A \cup A^*)$ implica que el conjunto cerrado $B = \{x\}$ satisface $A \cap B = \emptyset$. Se elige, así, un elemento $z \in \alpha(\xi)$. Las propiedades del conjunto $\alpha-$límite muestra que existe

$$0 < t_k \to \infty \quad \text{con} \quad \xi(-t_k) \in S_{\mathcal{A}} \quad \text{tal que} \quad \lim_{k\to\infty} \xi(-t_k) = z. \tag{1.35}$$

Como $T(t_k)\xi(-t_k) = \xi(0) = x \in B$ para todo $t_k > 0$, cuando se considera una constante $\varepsilon > 0$ existe $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tal que $d(\xi(-t_k), A^*) < \varepsilon, \forall t_k \geq t_0$ (proposición 1.4.3). A partir de esto se obtiene $\xi(-t_k) \in A^*$, si k es suficientemente grande. Por (1.35) y la compacidad de A^*, se obtiene $z \in A^*$. Por tanto,

$$x \notin (A \cup A^*) \quad \Rightarrow \quad \alpha(\xi) \subset A^*.$$

Para continuar la prueba de (iii), se considera $z \in \omega(x)$. Existe $0 < t_n \to +\infty$ de modo que $\xi_x^+(t_n) \to z$. De aquí se desprende la siguiente afirmación

$$\exists\, \delta > 0 \quad \text{de modo que} \quad \xi_x^+(t_{n_0}) \in \mathcal{O}_\delta(A) \quad \text{para algún} \quad t_{n_0}.$$

Si se supone lo contrario, cuando $\delta > 0$ cada $\xi_x^+(t_n) \in S_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{O}_\delta(A)$. Así, el cerrado $\tilde{B} = S_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{O}_\delta(A)$ satisface $A \cap \tilde{B} = \emptyset$. Para cada $\varepsilon > 0$, se tiene $d(x, A^*) < \varepsilon$ (proposición 1.4.3) y se concluye que $x \in A^*$. Esta contradicción con la condición (iii) prueba la afirmación. Consecuentemente, $\xi_x^+(t_{n_0}) \in \mathcal{O}_\delta(A) \cap S_{\mathcal{A}}$ y $\lim_{n\to\infty} T(t_n)\xi_x^+(t_{n_0}) = z \in A$ (A es un atractor débil). Por lo tanto,

$$x \notin (A \cup A^*) \quad \Rightarrow \quad \omega(x) \subset A.$$

Esto demuestra (iii) y concluye la prueba del teorema. $\square$

El siguiente corolario describe una caracterización del repulsor asociado a un atractor local débil. Será de utilidad para presentar la equivalencia de las definiciones de par atractor-repulsor y pareja atractor-repulsor cuando en el segundo capítulo se trabaje con atractores globales.

Corolario 1.4.5. *Si (A, A^*) es una pareja atractor-repulsor para $T(\cdot)$, respecto a $S_{\mathcal{A}}$. Entonces, el repulsor A^* está formado por todos los elementos $x \in S_{\mathcal{A}}$ para los cuales $d\big(T(t)x, A\big)$ no tiende a cero cuando $t \to +\infty$.*

Demostración. Si se elige $x \in S_{\mathcal{A}}$ de modo $d\big(T(t)x, A\big)$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, aparecen dos casos complementarios y excluyentes: (i) $x \in A$; (ii) $x \notin A$. En el caso (i), el teorema 1.4.4 muestra directamente que $x \notin A^*$. En el caso (ii), $x \in S_{\mathcal{A}} \setminus A$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} d\big(T(t)x, A\big) = 0$, en otras palabras $\emptyset \neq \omega(x) \subset A$ y así $x \notin A^*$. Es decir

$$A^* \subset \{x \in S_{\mathcal{A}} : d\big(T(t)x, A\big) \nrightarrow 0 \text{ cuando } t \to +\infty\} = F.$$

Para obtener $F \subset A^*$, se considera un elemento $y \in S_{\mathcal{A}} \setminus A^*$ y se analizan los casos (I) $y \in A$; (II) $y \notin A$. En (I), el compacto invariante $A \supset \omega(y)$ y se concluye que $y \notin F$. En (II), la parte (iii) del teorema 1.4.4 implica que $\omega(y) \subset A$, en otras palabras $y \notin F$. En conclusión, $A^* \supset F$ y se obtiene el corolario. □

1.4.6. Si la intersección $\omega(x) \cap A^*$ es un conjunto no vacío y $x \in S_{\mathcal{A}}$, el teorema 1.4.4 garantiza que la órbita $\xi_x(\mathbb{R})$ está incluida en A^*. Consecuentemente, el conjunto $\omega(x) \subset A^*$ y su intersección $\omega(x) \cap A \subset A \cap A^* = \emptyset$. En otras palabras, $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$ implica que $\omega(x) \cap A^* = \emptyset$. Análogamente, cuando $x \in S_{\mathcal{A}}$, el atractor local (débil) en $S_{\mathcal{A}}$ satisface

$$\omega(x) \cap A \neq \emptyset \implies \omega(x) \subset A$$

pues $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$ garantiza $\omega(x) \cap A^* = \emptyset$. De este modo, cada $z \in \omega(x) \setminus A$ satisface $z \notin (A \cup A^*)$ y en consecuencia $\omega(z) \subset A$ (teorema 1.4.4). Es decir, $\omega(\omega(x) \setminus A) \subset A$. También desde que A es invariante, $\omega(\omega(x) \cap A) \subset A$. Por tanto, $\omega(\omega(x)) \subset A$. Y de la invarianza de $\omega(x)$ se tiene $\omega(x) \subset A$ cuando $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Así, se concluye que el conjunto límite $\omega(x)$ es parte del atractor local débil A cuando lo intersecta.

1.4.2 Caracterización de la descomposición de Morse

Se estudia la llamada descomposición de Morse [14, 36] para usarla adecuadamente en la construcción de una función de Lyapunov, cuando el semigrupo induce algunas condiciones técnicas adicionales en el atractor global [1]. Para tal fin, se recuerda que en un compacto invariante $S_{\mathcal{A}} \subset X$, cada conjunto $A \subset S_{\mathcal{A}}$ que satisface $\omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}) = A$ para algún $\varepsilon > 0$ induce al repulsor asociado

$$A^* = \{x \in S_{\mathcal{A}} : d\big(T(t)x, A\big) \nrightarrow 0 \text{ cuando } t \to +\infty\}.$$

Definición 1.4.7. *Sea $S_{\mathcal{A}} \subset X$, un conjunto compacto que también es invariante con respecto a $T(\cdot)$. Una determinada colección ordenada $\{E_1, \dots, E_n\}$ de subconjuntos $E_j \subset S_{\mathcal{A}}$ es una **descomposición de Morse** (débil) de $S_{\mathcal{A}}$ si existe un sucesión creciente*

$$A_0 = \emptyset \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset S_{\mathcal{A}} = A_n \tag{1.36}$$

de atractores locales (débiles y en $S_{\mathcal{A}}$) para los cuales se cumple

$$E_j = A_j \cap A^*_{j-1}, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

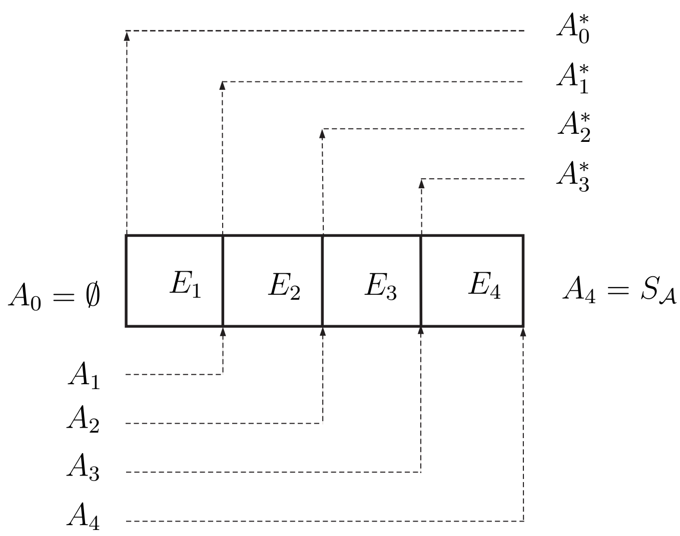

Figura 1.3: Descomposición de Morse (ilustración)

1.4.8. Como $S_{\mathcal{A}}$ es un compacto invariante, se cumple que $\alpha(z) \neq \emptyset$ y $\omega(z) \neq \emptyset$ para todo $z \in S_{\mathcal{A}}$. Por otro lado, de la definición de repulsor asociado se obtienen las igualdades $A_0^* = A_n = S_{\mathcal{A}}$ y $A_n^* = A_0 = \emptyset$. Es más, por cada $1 \leq i \leq n$ la condición $\omega(z) \cap A_i = \emptyset$ implica $\omega(z) \cap A_{i-1} = \emptyset$ y por eso, se cumple la siguiente cadena de inclusiones

$$S_{\mathcal{A}} = A_0^* \supset A_1^* \supset \cdots \supset A_{n-1}^* \supset A_n^* = \emptyset. \tag{1.37}$$

Además si $i < j$ la intersección $E_i \cap E_j = (A_i \cap A_j) \cap (A_{i-1}^* \cap A_{j-1}^*) = A_i \cap A_{j-1}^*$ satisface $E_i \cap E_j \subset A_{j-1} \cap A_{j-1}^*$, pero por el teorema 1.4.4 la intersección $A_{j-1} \cap A_{j-1}^* = \emptyset$. Por tanto, los compactos E_j son disjuntos, dos a dos.

Ejemplo 1.4.9. *Si A es un atractor local débil en $S_{\mathcal{A}}$ el conjunto de dos elementos $\{E_1 = A, E_2 = A^*\}$ es una descomposición de Morse (débil) de $S_{\mathcal{A}}$. Los atractores locales $A_0 = \emptyset$, $A_1 = A$ y $A_2 = S_{\mathcal{A}}$ satisfacen $E_1 = A_1 \cap A_0^* = A$ y $E_2 = A_2 \cap A_1^* = A^*$.*

El siguiente lema técnico permitirá demostrar las propiedades de la descomposición de Morse.

Lema 1.4.10. *Sea $x \in S_{\mathcal{A}}$, con las condiciones de la definición 1.4.7.*

(a) Cuando $i > 0$ es el menor entero con $\omega(x) \subset A_i$ entonces $x \in A_{i-1}^*$. Además

$$A_{i-1}^* \supset \alpha(x) \cup \xi_x(\mathbb{R}) \cup \omega(x) \quad \textit{y} \quad \omega(x) \subset E_i.$$

(b) Si $j < n$ es el mayor entero con $A_j^* \supset \alpha(x)$ ('menor conjunto') entonces

$$\xi_x(\mathbb{R}) \subset A_{j+1} \quad y \quad \alpha(x) \subset E_{j+1} = A_{j+1} \cap A_j^*.$$

(c) Si $0 < i, j < n$ satisfacen (a) y (b) entonces $j \geq i - 1$.

Demostración. Las inclusiones en (1.36) garantizan la existencia del entero $i > 0$ con $\omega(x) \subset A_i$ y $\omega(x) \not\subset A_{i-1}$. Como A_{i-1} es un atractor local en $S_{\mathcal{A}}$, de **1.4.6** se obtiene que la intersección $\omega(x) \cap A_{i-1} = \emptyset$; es decir $x \in A_{i-1}^*$ y el compacto $A_{i-1}^* \supset \alpha(x) \cup \xi_x(\mathbb{R}) \cup \omega(x)$. Por tanto, ($a$) es verdad ($E_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ es intersección de compactos invariantes).

En la suposición del ítem (b), la existencia del entero $j < n$ que satisface las condiciones $A_j^* \supset \alpha(x)$ y $A_{j+1}^* \not\supset \alpha(x)$ viene dada por las inclusiones de los repulsores que aparece en (1.37). De este modo, se obtiene que toda la imagen de la solución global $\xi_x(\mathbb{R})$ es parte del atractor A_{j+1}. Si se asume, por el contrario, que la órbita

$$\xi_x(\mathbb{R}) \not\subset A_{j+1},$$

se infiere que existirá algún parámetro $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ para el cual se verifica $\xi(\tilde{t}) \notin A_{j+1}$. En este contexto, ocurren dos situaciones complementarias

$$\text{o} \quad \xi(\tilde{t}) \in A_{j+1}^* \quad \text{o bien} \quad \xi(\tilde{t}) \notin A_{j+1}^*.$$

En el primer caso, es decir cuando $\xi(\tilde{t})$ pertenece al compacto invariante A_{j+1}^*, se obtiene que el conjunto $\alpha(x)$ este incluido en el repulsor A_{j+1}^*, lo cual es una contradicción. Si por el contrario se verifica el segundo caso que significa $\xi(\tilde{t}) \notin A_{j+1}^*$ se puede aplicar el ítem (iii) del teorema 1.4.4. Con esto se garantiza que, también en este caso, el conjunto $\alpha(x)$ es parte de A_{j+1}^*. Consecuentemente, ambos casos conducen a una contradicción. Por lo tanto, toda la trayectoria $\xi_x(\mathbb{R}) \subset A_{j+1}$ y se cumple el ítem (b).

En las condiciones de (c), se observa inicialmente que la órbita $\xi_x(\mathbb{R}) \subset A_{j+1} \cap A_{i-1}^*$. Luego, para probar que $j \geq i-1$ se procede por el absurdo. Si $j < i-1$ o lo que es equivalente a decir que $j+1 \leq i-1$, entonces $A_{j+1} \subset A_{i-1}$, luego $A_{j+1} \cap A_{i-1}^* \subset A_{i-1} \cap A_{i-1}^* = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la afirmación (c) es válida. □

La siguiente proposición, tomada del último capítulo de [36], describe las propiedades más importantes y útiles de una descomposición de Morse. Estas están íntimamente relacionadas con las propiedades dinámicas presentadas en [10] donde aparece el concepto de *conjunto invariante aislado*.

Proposición 1.4.11. *Sea $S_{\mathcal{A}} \subset X$ un compacto, invariante con respecto a $T(\cdot)$ y $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$ una descomposición de Morse de $S_{\mathcal{A}}$ asociada a los atractores locales (débiles) $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = S_{\mathcal{A}}$. Se satisfacen los siguientes enunciados.*

(a) Existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\epsilon(E_i) \cap \mathcal{O}_\epsilon(E_j) = \emptyset$ si $1 \leq i < j \leq n$.

(b) Si $\xi_x = \xi : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ es la solución global que pasa por $x \in S_{\mathcal{A}}$, entonces:

- *o $\xi(\mathbb{R}) \subset E_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$.*
- *o existen subíndices $k < r$ tal que $E_k \supset \omega(x)$ y $\alpha(x) \subset E_r$.*

(c) Cada A_k está únicamente determinado por $\{E_1, \ldots, E_n\}$:

$$A_k = \big\{x \in S_{\mathcal{A}} \colon \alpha(\xi_x) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\big\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

(d) Si $1 \leq i \leq n$, $\big(A_{i-1}, E_i\big)$ es una pareja atractor-repulsor respecto a A_i.

Demostración. En el acápite **1.4.8** se verifica que la familia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ está formada por conjuntos compactos y disjuntos. De aquí se concluye que el ítem (a) es verdadero.

Para probar (*b*), se considera $x \in S_{\mathcal{A}}$, y se eligen los siguientes subíndices.

$$0 < i = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} \colon \omega(x) \subset A_k\} \quad \text{y} \quad j = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \colon {A_k}^* \supset \alpha(\xi_x)\} < n.$$

Por el lema 1.4.10, la órbita $\xi(\mathbb{R})$ está incluida en la intersección $A_{j+1} \cap A_{i-1}^*$ y el subíndice $j \geq i-1$. Con esto se obtiene el primer punto de (b), es decir:

$$\text{si} \quad j = i-1 \implies \xi(\mathbb{R}) \subset A_i \cap A_{i-1}^* = E_i.$$

Si, por el contrario, $j > i-1$ se usa que $\omega(x) \subset E_i$ y $\alpha(\xi_x) \subset E_{j+1}$. Por tanto, existen $k = i < j+1 = r$ tal que $\alpha(\xi_x) \subset E_r$ y $\omega(x) \subset E_k$. Se concluye que el ítem (*b*) es verdadero.

En (c), cuando el elemento $x \in A_k$ con $k \geq 1$ entonces el conjunto $\alpha(\xi_x)$ es no-vacío y está incluido en A_k. En ese sentido, existe el menor entero $0 < i \leq k$ para el cual se verifica $\alpha(\xi_x) \subset A_i$. En consecuencia $\alpha(\xi_x) \cap A_{i-1} = \emptyset$. Luego $\omega(z) \cap A_{i-1} = \emptyset, \forall z \in \alpha(\xi_x)$ (pues $z \in \alpha(\xi_x)$ implica $\omega(z) \subset \alpha(\xi_x)$) y se obtiene:

$$i = \min\{j \in \mathbb{Z} \colon \alpha(\xi_x) \subset A_j\} \implies \alpha(\xi_x) \subset A^*_{i-1}.$$

En otras palabras, existe algún $1 \leq i \leq k$ de manera que el conjunto $\alpha(\xi_x) \subset A_i \cap A^*_{i-1} = E_i$. De esto se concluye que

$$A_k \subset \big\{y \in S_{\mathcal{A}} : \exists \quad \xi_y : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}} \quad y \quad \alpha(\xi_y) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\big\} = M_k.$$

Recíprocamente, cuando $y \in M_k$ entonces $\alpha(\xi_y) \subset E_j$ para algún $1 \leq j \leq k$. Desde que $E_j = A_j \cap A^*_{j-1} \subset A_j \subset A_k$, se tiene que el conjunto límite $\alpha(\xi_y) \subset A_k$, luego $\xi_y(\mathbb{R}) \subset A_k$ (teorema 1.4.4). En otras palabras $M_k \subset A_k$. Por lo tanto, se cumple el ítem (c).

Para probar (d) se define, el repulsor de A_{i-1} respecto de A_i por

$$A^*_{i-1}|_{A_i} = \big\{x \in A_i : \omega(x) \cap A_{i-1} = \emptyset\big\}$$

y se demostrará que $E_i = A^*_{i-1}|_{A_i}$, por doble inclusión. Si $z \in E_i = A_i \cap A^*_{i-1}$, el conjunto límite $\omega(z) \cap A_{i-1} = \emptyset$ y así $z \in A^*_{i-1}|_{A_i}$; en otras palabras $E_i \subset A^*_{i-1}|_{A_i}$. Para la otra inclusión, se da $y \in A^*_{i-1}|_{A_i}$, es decir $y \in A_i$ satisface $\omega(y) \cap A_{i-1} = \emptyset$, luego $y \in A_i \cap A^*_{i-1} = E_i$; por lo tanto $A^*_{i-1}|_{A_i} \subset E_i$ y se demuestra (d). La proposición es verdadera. □

Para analizar el recíproco de la proposición anterior, se presentan condiciones suficientes para obtener la definición 1.4.7. Las tres propiedades útiles se enuncian en el siguiente lema y se probará que produce el efecto esperado en el principal teorema de esta sección (teorema 1.4.14). En este contexto, es necesario señalar que la proposición 1.3.29 garantiza la existencia de las soluciones globales, y así la suposición en (3) del lema 1.4.12 no genera ninguna restricción adicional.

Lema 1.4.12. *Sea $S_{\mathcal{A}} \subset X$ un compacto, invariante con respecto a $T(\cdot)$. Si se asume que la familia ordenada $\{E_1, \ldots, E_n\}$ satisface las tres condiciones:*

1. *Cada $E_k \subset S_{\mathcal{A}}$ es compacto e invariante.*
2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\epsilon(E_i) \cap \mathcal{O}_\epsilon(E_j) = \emptyset$ cuando $1 \le i < j \le n$.*
3. *Si $\xi = \xi_x : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ es la solución global que pasa por $x \in S_{\mathcal{A}}$, entonces*
   - *o $\xi_x(\mathbb{R}) \subset E_i$ para algún $i = 1, \ldots, n$.*
   - *o existen subíndices $j < i$ tal que $E_j \supset \omega(x)$ y $\alpha(\xi_x) \subset E_i$.*

Entonces los conjuntos $A_k = \big\{x \in S_{\mathcal{A}} \colon \alpha(\xi_x) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\big\}$ con $1 \le k \le n$ y $A_0 = \emptyset$ son compactos invariantes que satisfacen (1.36).

Demostración. En el compacto $S_{\mathcal{A}}$ se tiene que

$$A_k = \big\{y \in S_{\mathcal{A}} : \exists \quad \xi_y : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}} \quad y \quad \alpha(\xi_y) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\big\} \tag{1.38}$$

cuando $1 \le k \le n$. Se cumple que $A_i \subset A_j$ para $i < j$ pues $E_1 \cup \cdots \cup E_i$ está incluido en $E_1 \cup \cdots \cup E_i \cup \cdots \cup E_j$. Además, por cada $x \in S_{\mathcal{A}}$, la respectiva solución global ξ_x satisface (3) y por eso existe $j = 1, \ldots, n$ para el cual o bien $\xi_x(\mathbb{R}) \subset E_j$ o en su defecto $\alpha(\xi_x) \subset E_j \subset E_1 \cup \cdots \cup E_n$. En ambos casos, (1.38) muestra que $x \in A_n$ (proposición 1.3.29). Por tanto, $S_{\mathcal{A}} \subset A_n$ y así $S_{\mathcal{A}} = A_n$. De aquí se desprende que

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = S_{\mathcal{A}}.$$

Por otro lado, cuando $t \ge 0$ se cumple $\alpha(\xi_a) = \alpha(\xi_{T(t)a})$ y por eso se verifica que $T(t)A_k \subset A_k$. Además, si $a \in A_k$ y $t \ge 0$ el elemento $b = \xi_a(-t)$ está bien definido y satisface no solo que $\alpha(\xi_b) = \alpha(\xi_a) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k$ sino también que $T(t)b = a$; es decir, $A_k \subset T(t)A_k$. Se concluye que cada A_k es invariante:

$$T(t)A_k = A_k, \quad \forall t \ge 0.$$

Afirmación *Los conjuntos $A_k \subset S_{\mathcal{A}}$ son cerrados.*

Como $A_n = S_{\mathcal{A}}$ es cerrado, se procede inductivamente y se asume que A_{k+1} es cerrado para algún $1 \leq k \leq n-1$. Para ver que A_k es cerrado, se elige una sucesión convergente

$$y_m \in A_k \text{ tal que } \lim_{m\to\infty} y_m = y \in A_{k+1} \tag{1.39}$$

($A_k \subset A_{k+1}$ y este último es cerrado). Por (1.38), existen soluciones globales $\xi_{y_m} : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ con $\xi_{y_m}(0) = y_m$ y $\alpha(\xi_{y_m}) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k$. Como $\xi_{y_m}(\mathbb{R})$ es parte del compacto $S_{\mathcal{A}}$, existe una subsucesión (denotada por ella misma) la cual converge puntualmente. Así, la función límite no solo satisface

$$\xi(t+s) = \lim_{m\to\infty} \xi_{y_m}(t+s) = \lim_{m\to\infty} T(t)\xi_{y_m}(s) = T(t)\xi(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0.$$

sino también (1.28). Luego, $\xi : \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ dada por $\xi(t) = \lim_{m\to\infty} \xi_{y_m}(t)$ es una solución global que pasa por $y = \xi(0)$. Es decir,

$$\lim_{m\to\infty} \xi_{y_m}(t) = \xi_y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, de (1.39) y (1.38) se observa que cada $a = \xi_{y_m}(t_0) \in S_{\mathcal{A}}$ satisface $\alpha(\xi_a) = \alpha(\xi_{y_m}) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k$; es decir, cada órbita $\xi_{y_m}(\mathbb{R})$ no solo está incluida en A_k sino también es parte del cerrado A_{k+1}. Por eso $\xi(\mathbb{R}) \subset A_{k+1}$ y así

$$\alpha(\xi_y) \subset A_{k+1}.$$

La invarianza de cada compacto E_j implica que $\alpha(\xi_z) \subset E_j, \forall z \in E_j$. Así, por la definición de A_{k+1} y la condición (1) se verifica que $E_j \cap A_{k+1} = \emptyset$ para $j > k+1$. Luego, se tiene que $\alpha(\xi_y) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_{k+1}$, en consecuencia

$$\text{o} \quad \alpha(\xi_y) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k, \quad \text{o bien} \quad \alpha(\xi_y) \subset E_{k+1}.$$

Con el propósito de probar que $y \in A_k$ y obtener que A_k es cerrado, se demostrará:

$$\alpha(\xi_y) \not\subseteq E_{k+1}. \tag{1.40}$$

Para establecer (1.40) se procede por el absurdo y se asume que el compacto invariante $E_{k+1} \supset \alpha(\xi_y)$, es decir existe $z \in \alpha(\xi_y) \subset E_{k+1}$. Con esto, la constante $\epsilon > 0$ de (2) genera una sucesión $t_\nu \to +\infty$ tal que $\xi_y(-t_\nu) \in \mathcal{O}_\epsilon(E_{k+1})$ y $d\big(\xi(-t_\nu), z\big) \leq \frac{1}{\nu}, \forall \nu \geq 1$. Como $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_{y_m}(-t_\nu) = \xi_y(-t_\nu)$, existe $m_\nu \geq \nu$ con $\xi_{y_{m_\nu}}(-t_\nu) \in \mathcal{O}_\epsilon(E_{k+1})$ y $d\big(\xi_{y_{m_\nu}}(-t_\nu), \xi(-t_\nu)\big) \leq \frac{1}{\nu}$. Es decir, se elige $m_\nu \geq \nu$ con

$$d\big(\xi_{y_{m_\nu}}(-t_\nu), z\big) \leq \frac{2}{\nu}, \quad \text{con} \quad \xi_{y_{m_\nu}}(-t_\nu) \in \mathcal{O}_\epsilon(E_{k+1}). \tag{1.41}$$

Por otro lado, se vio que cada $\xi_{y_m}(\mathbb{R}) \subset A_k$; por eso $\alpha(\xi_{y_m}) \subset E_r$ para algún $1 \leq r \leq k$, (1.38). Si $r > 1$, el segundo punto de (3) muestra $\omega(y_m) \subset E_j$ para $1 \leq j < r$; si por el contrario $\alpha(\xi_{y_m}) \subset E_1$, el primer punto de la misma hipótesis implica $\xi_{y_m}(\mathbb{R}) \subset E_1$ y así $\alpha(\xi_{y_m}) \cup \omega(y_m) \subset E_1$. En todos los casos, se obtiene:

$$\alpha(\xi_{y_m}) \cup \omega(y_m) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k. \tag{1.42}$$

Por (1.41) y (1.42), existen $\tau_\nu < t_\nu < s_\nu$ para los cuales $\xi_{y_{m_\nu}}(-t) \in \overline{\mathcal{O}}_\epsilon(E_{k+1})$ cuando $\tau_\nu \leq t \leq s_\nu$, pero con $d\big(\xi_{y_{m_\nu}}(-s_\nu), E_{k+1}\big) = d\big(\xi_{y_{m_\nu}}(-\tau_\nu), E_{k+1}\big) = \epsilon > 0$. La invarianza de E_{k+1} no solo implica que $\xi_{y_{m_\nu}}\big([-s_\nu, -\tau_\nu]\big) \cap E_{k+1} = \emptyset$ sino también que para $\nu \in \mathbb{N}$ suficiente grande, la sucesión $s_\nu - \tau_\nu \to +\infty$ (vea (1.41)). Para continuar, se considera la sucesión $x_\nu := \xi_{y_{m_\nu}}(-s_\nu) \in A_{k+1}$ que satisface $d\big(x_\nu, E_{k+1}\big) = \epsilon$; en el cerrado A_{k+1} existe una subsucesión de x_ν (que se denotará por ella misma) de modo que $x = \lim\limits_{\nu\to+\infty} x_\nu \in A_{k+1}$ satisface

$$d(x, E_{k+1}) = \epsilon > 0.$$

Además, $T(t)x_\nu = T(t)\xi_{y_{m_\nu}}(-s_\nu) = \xi_{y_{m_\nu}}(t - s_\nu) \to T(t)x$ cuando $\nu \to +\infty$. Pero, $\xi_{y_{m_\nu}}(t - s_\nu) \in \xi_{y_{m_\nu}}\big([-s_\nu, -\tau_\nu]\big) \subset \overline{\mathcal{O}}_\epsilon(E_{k+1})$ para $0 \leq t < s_\nu - \tau_\nu$; luego se cumple $T(t)x \in \overline{\mathcal{O}}_\epsilon(E_{k+1}), \forall t \geq 0$ lo cual implica $\omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}}_\epsilon(E_{k+1})$. Es más, por la primera y tercera condición, $\omega(x) \subset E_{k+1}$. Desde que $x \in A_{k+1}$ se tiene que $\alpha(\xi_x) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_{k+1}$. Por la condición (3),

$$\xi_x(\mathbb{R}) \subset E_{k+1} \quad \text{y} \quad x \in E_{k+1}.$$

Esta contradicción muestra (1.40) y así la afirmación (página 54). $\square$

El siguiente lema simplifica la presentación de la prueba del principal teorema de ésta sección. Se usan distintas vecindades de conjuntos que se construyen a partir algunos conjuntos invariantes por medio de conjuntos límites, tal como se hace en el lema 1.4.12.

Lema 1.4.13. *Sea* $S_{\mathcal{A}} \subset X$ *y* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *como en el lema 1.4.12. Los conjuntos* $A_0 = \emptyset$ *y* $A_k = \big\{x \in S_{\mathcal{A}} \colon \alpha(\xi_x) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\big\}$ *con* $1 \leq k \leq n$ *satisfacen:*

(a) Si existe $\{1, \ldots, n\} \ni k \mapsto \varepsilon(k) > 0$ *de modo que para* $k \leq n-1$

$$\omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1}) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_{k+1} \quad \text{y} \quad \omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \setminus A_k \neq \emptyset$$

con $0 < \varepsilon(k) < \varepsilon(k+1)$ *entonces existe* $x_\nu \in \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}$ *y* $s_\nu > 0$ *con*[12]

$$T(s_\nu)x_\nu \in \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1}) \quad \text{y} \quad d\big(T(s_\nu)x_\nu, E_{k+1}\big) \leq \frac{2}{\nu}.$$

(b) Cada compacto invariante A_k *admite alguna constante* $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ *para la cual* $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_k$*.*

Demostración. En el ítem (a), cada conjunto $A_k \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}$ es compacto e invariante (lema 1.4.12); y por tal motivo se verifica que $A_k = \omega(A_k) \subset \omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}\big)$. Se considera

$$y \in \omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \setminus A_k \neq \emptyset.$$

Este conjunto límite genera las sucesiones $x_n \in \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_A$ y $t_n \to +\infty$ con $y_n = T(t_n)x_n \to y$. Como en la prueba de la afirmación de la página 54, las soluciones globales $\xi_{y_n} \colon \mathbb{R} \to S_{\mathcal{A}}$ generan una subsucesión (denotada por ξ_{y_n}) que converge a una solución global, es decir

$$\lim_{n \to +\infty} \xi_{y_n}(t) = \xi_y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

[12]En (a) se cumple $E_{k+1} \subset A_{k+1}$, por tal motivo la elección de $0 < \varepsilon(k) < \varepsilon(k+1)$ permite ver que la vecindad $\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1})$ satisface $\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1}) = \mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1}) \cap \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1})$.

Las condiciones $A_k \subset A_{k+1}$, $0 < \varepsilon(k) < \varepsilon(k+1)$ y $\omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1}) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_{k+1}$ muestran que $\omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \subset \omega\big(\mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1}) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_{k+1}$ y por eso $y \in A_{k+1}$. Con esto se obtiene, no solo la inclusión $\xi_y(\mathbb{R}) \cup \alpha(\xi_y) \cup \omega(y) \subset A_{k+1}$ sino también $\alpha(\xi_y) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_{k+1}$. Además, $y \notin A_k$ implica $\alpha(\xi_y) \subset E_{k+1}$. Pero, el compacto invariante E_{k+1} satisface $E_{k+1} \subset A_{k+1}$, por eso existen $\rho_\nu \to +\infty$ y $z \in E_{k+1}$ de modo que $\xi_y(-\rho_\nu) \in \mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1})$ y $d\big(\xi_y(-\rho_\nu), z\big) \le \frac{1}{\nu}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{y_n}(-\rho_\nu) = \xi_y(-\rho_\nu)$, existe $n_\nu \ge \nu$ con $t_{n_\nu} > \rho_\nu$ tal que

$$\mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1}) \cap \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1}) \ni \xi_{y_{n_\nu}}(-\rho_\nu) = T(t_{n_\nu} - \rho_\nu)x_{n_\nu}$$

y $d\big(T(t_{n_\nu} - \rho_\nu)x_{n_\nu}, \xi_y(-\rho_\nu)\big) \le \frac{1}{\nu}$. En otras palabras,

$$d\big(T(t_{n_\nu} - \rho_\nu)x_{n_\nu}, z\big) \le \frac{2}{\nu} \quad \text{con} \quad z \in E_{k+1}.$$

Esto muestra (a) para $x_v = x_{n_\nu} \in \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}$ y $s_v = t_{n_\nu} - \rho_\nu > 0$.

Para demostrar (b), se observa que la afirmación es verdadera para $A_n = S_{\mathcal{A}}$. Se asume por inducción que para algún $k \le n-1$, se cumple $\omega\big(U_{k+1} \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_{k+1}$, con $U_{k+1} = \mathcal{O}_{\varepsilon(k+1)}(A_{k+1})$ y $\varepsilon(k+1) > 0$. En este contexto, se considera las vecindades

$$U_k = \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(A_k) \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon(k) < \text{mín}\big\{\varepsilon(k+1), d(A_k, E_{k+1}), \epsilon\big\},$$

donde $\epsilon > 0$ es la constante dada en (2), del lema 1.4.12 (note: $E_{k+1} \cup A_k \subset A_{k+1}$ y $E_{k+1} \cap A_k = \emptyset$). Cada U_k satisface $A_k = \omega(A_k) \subset \omega(U_k \cap S_{\mathcal{A}})$. Para concluir, bastará mostrar que para algún $\varepsilon(k) > 0$ suficientemente pequeño la diferencia $\omega(U_k \cap S_{\mathcal{A}}) \setminus A_k$ es igual al conjunto vacío. Así, se supone por contradicción la existencia de una sucesión $0 < \delta_\nu = \varepsilon(k_\nu)$ que satisface $\delta_\nu \to 0$ de modo que su respectivo $U_k = \mathcal{O}_{\delta_\nu}(A_k)$ satisface $\omega\big(U_k \cap S_{\mathcal{A}}\big) \setminus A_k \neq \emptyset$. Por la parte (a),

$$\exists\, x_\nu \in \mathcal{O}_{\delta_\nu}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}} \qquad \text{y} \qquad \exists s_\nu > 0 \qquad \text{tal que} \tag{1.43a}$$

$$T(s_\nu)x_\nu \in \mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1}) \quad \text{con} \quad d\big(T(s_\nu)x_\nu, E_{k+1}\big) \le \frac{2}{\nu}. \tag{1.43b}$$

Con lo cual es posible encontrar las sucesiones $\tau_\nu < s_\nu < \widetilde{\tau_\nu} \leq +\infty$ para las cuales se cumplen $d\big(T(\tau_\nu)x_\nu, E_{k+1}\big) = \varepsilon(k)$ y $T\big(]\tau_\nu, \widetilde{\tau_\nu}[\big)x_\nu \subset \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1})}$, junto a una de las dos condiciones, siguientes: o $d\big(T(\widetilde{\tau_\nu})x_\nu, E_{k+1}\big) = \varepsilon(k)$ o bien $\widetilde{\tau_\nu} = +\infty$. Por la compacidad de la frontera, $T(\tau_\nu)x_\nu$ admite una subsucesión (denotada por ella misma) cuyo límite $\hat{x} = \lim\limits_{\nu\to\infty} T(\tau_\nu)x_\nu$ también satisface

$$d\big(\hat{x}, E_{k+1}\big) = \varepsilon(k). \tag{1.44}$$

Además, para $x = \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$ no solo se cumple $x \in A_k$ sino también que la órbita $\bigcup\limits_{t\geq 0} T(t)x \subset A_k$ ($\delta_\nu \to 0$ y (1.43a)). En este contexto, el conjunto $\bigcup\limits_{r\in[0,\tau_\nu]} T(r)x_\nu$ se acerca al invariante A_k a medida que τ_ν crece, y así sin pérdida de generalidad, en la construcción que ya cumple $d\big(T(\tau_\nu)x_\nu, E_{k+1}\big) = \varepsilon(k)$ y $x_\nu \in \mathcal{O}_{\delta_\nu}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}$, se puede suponer que $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\nu < \tau_{\nu+1}$. Luego si $\nu \to +\infty$ se obtiene

$$\hat{x} \in \omega(\mathcal{O}_{\delta_\nu}(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}) \subset \omega(U_{k+1} \cap S_{\mathcal{A}}) = A_{k+1}.$$

Por otro lado, (1.43b) implica $T(s_\nu)x_\nu \to E_{k+1}$ y, por la construcción, cada $T(t)x_\nu \in \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1})}$ cuando $s_\nu \leq t < \tilde{\tau_\nu}$. De este modo, la invarianza de E_{k+1} implica que $T([s_\nu, \tilde{\tau_\nu}])x_\nu \cap E_{k+1} = \emptyset$ cuando ν es suficientemente grande, luego $\tilde{\tau_\nu} - s_\nu \to +\infty$. Además, por cada $t \geq 0$ se tiene $T(t)\hat{x} = \lim\limits_{\nu\to\infty} T(t+\tau_\nu)x_\nu$ (continuidad), donde $T(t+\tau_\nu)x_\nu \in \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1})}$ para $0 \leq t \leq \widetilde{\tau_\nu} - \tau_\nu$; desde que $\widetilde{\tau_\nu} - s_\nu < \widetilde{\tau_\nu} - \tau_\nu$, se tiene que $\widetilde{\tau_\nu} - \tau_\nu \to +\infty$; en otras palabras, $T(t)\hat{x} \in \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon(k)}(E_{k+1})}$, $\forall t \geq 0$ y por el lema 1.4.12,

$$\omega(\hat{x}) \subset E_{k+1}.$$

Por otro lado, $\hat{x} \in A_{k+1}$ implica $\alpha(\hat{x}) \subset E_{k+1}$, luego por la tercera condición del lema 1.4.12 toda la solución global que pasa por $\hat{x}$ está incluida en E_{k+1}. En particular, $\hat{x} \in E_{k+1}$. Esta contradicción con (1.44) muestra que existe algún U_k de modo que la diferencia $\omega\big(U_k \cap S_{\mathcal{A}}\big) \setminus A_k = \emptyset$ y así $\omega\big(U_k \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_k$. $\square$

El siguiente teorema (el más importante de esta sección) aparece en el último capítulo de [36]. Se presentan las condiciones suficientes para que una determinada familia ordenada de compactos invariantes sea la descomposición de Morse de algún $S_{\mathcal{A}} \subset X$ (definición 1.4.7). Cabe mencionar que estas propiedades son coherentes con la descripción dada en [1] y [6]. En estos trabajos se relaciona la descomposición de Morse con el concepto de *familia invariante aislada* y se describirá en la proposición 2.2.14.

Teorema 1.4.14. *Sea $S_{\mathcal{A}} \subset X$ un compacto, invariante con respecto a $T(\cdot)$. Si se asume que la familia ordenada $\{E_1, \ldots, E_n\}$ satisface las tres condiciones del lema 1.4.12, entonces $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una descomposición de Morse de $S_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Se cumplen las condiciones del lema 1.4.12. Así, los compactos invariantes $A_0 = \emptyset$ y $A_k = \big\{x \in S_{\mathcal{A}} \colon \alpha(\xi_x) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_k\big\}$ con $1 \leq k \leq n$ no solo satisfacen (1.36) sino también, admiten vecindades $\mathcal{O}_\varepsilon(A_k)$ (con cada constante $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$) donde $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A_k) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A_k$ (lema 1.4.13). Por tanto, se obtiene una familia creciente de atractores locales (débiles y en $S_{\mathcal{A}}$). Para concluir bastará demostrar que se verifica la siguiente afirmación.

Afirmación *Para estos atractores locales, su intersección satisface*

$$E_j = A_j \cap A^*_{j-1},$$

para todo $1 \leq j \leq n$.

Sea $1 \leq j \leq n$, por la invarianza de cada E_k, se cumple $\alpha(\xi_z) \subset E_k, \forall z \in E_k$. A partir de esto y la definición de A_j se obtiene que $E_k \subset A_j$ cuando $1 \leq k \leq j$. En particular, $E_j \subset A_j$. Por otro lado, si $E_j \not\subset A^*_{j-1}$, existe que $z \in E_j$ pero $z \notin A^*_{j-1}$. En este contexto aparecen dos casos complementarios

$$\text{(I): } z \in A_{j-1} \quad \text{y} \quad \text{(II): } z \notin A_{j-1}.$$

- En (I), la invarianza del compacto A_{j-1} muestra que $\emptyset \neq \omega(z) \subset A_{j-1}$. Además, desde que $E_1 \cup \cdots \cup E_{j-1} \subset A_{j-1}$, el tercer ítem de lema 1.4.12 muestra que $\omega(z) \subset E_k$ para algún $k \leq j-1$. Pero $\omega(z) \subset E_j$ (pues $z \in E_j$). Luego $\omega(z) \subset E_k \cap E_j = \emptyset$. Lo cual es una contradicción.

- En (II), se cumple $z \notin \left(A_{j-1} \cup A^*_{j-1}\right)$. Por la parte (iii) del teorema 1.4.4, se tiene que $\omega(z) \subset A_{j-1}$ y $\alpha(\xi_z) \subset A^*_{j-1}$. De la primera inclusión se obtiene $\omega(z) \subset E_k$, para algún $k \leq j-1$, y en consecuencia $\omega(z) \subset E_k \cap E_j$ lo que contradice la condición (2) del lema 1.4.12.

En ambos casos se obtiene un absurdo al suponer que $E_j \not\subset A^*_{j-1}$. Por tanto,

$$E_j \subset A_j \cap A^*_{j-1}.$$

Para demostrar la otra inclusión se considera $z \in A_j \cap A^*_{j-1}$. Si $z \in A_j$, se obtiene $\alpha(\xi_z) \subset E_1 \cup \cdots \cup E_j$. Además, como $E_1 \cup \cdots \cup E_j \subset A_j$, la condición (3) del lema 1.4.12 implica que $\omega(z) \subset E_k$ para algún $k = 1, \ldots, j$. Si $z \in A^*_{j-1}$, es decir $\omega(z) \cap A_{j-1} = \emptyset$, la propiedad $E_1 \cup \cdots \cup E_{j-1} \subset A_{j-1}$ muestra que $\omega(z) \cap (E_1 \cup ... \cup E_{j-1}) = \emptyset$; la hipótesis usada anteriormente implica $\omega(z) \subset E_k$ para algún $k \geq j$. Se concluye que $k = j$ y $\omega(z) \subset E_j$, de aquí y la definición de $A_j \ni z$ se desprende que $\alpha(z) \subset E_j$, es decir $\xi(\mathbb{R}) \subset E_j$. En particular, $z \in E_j$ y se concluye que

$$A_j \cap A^*_{j-1} \subset E_j.$$

Esto demuestra la afirmación de la página 60 y concluye la prueba del teorema. $\square$

Capítulo 2

Sistemas Gradientes

"Nada te turbe, nada te espante.
Todo se pasa. Dios no se muda.
La paciencia todo lo alcanza.
Quien a Dios tiene, nada le falta.
Sólo Dios basta."
Santa Teresa de Jesús.

Se presentan los semigrupos gradientes, pues la función de Lyapunov permite describir la dinámica del atractor global cuando el semigrupo gradiente tiene un número finito de equilibrios [17]. Esta estrategia se extiende a los sistemas tipo–gradiente [1]: su atractor global tiene una descomposición de Morse, sin conexiones homoclínicas.

2.1 Semigrupos con alguna función de Lyapunov

Como en el primer capítulo, para el espacio métrico X, se escribe $T(\cdot)$ para referir a un semigrupo, tal como se presenta en la definición 1.1.4. En este contexto, se recuerda que, un **equilibrio** para $T(\cdot)$ es un elemento $u \in X$ que satisface $T(t)u = u, \forall t \geq 0$, en otras palabras $u \in X$ es un punto fijo para cada $T(t)$ con $t \geq 0$. Se denota por $\mathcal{E}$ al conjunto de todos los equilibrios de $T(\cdot)$.

Definición 2.1.1. *Un semigrupo $T(\cdot)$ se dice que es* ***gradiente*** *en X si $T(\cdot)$ admite una* ***función de Lyapunov*** *en X (global): una función continua $V : X \to \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:*

- $[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *es decreciente*[1], *para cada* $x \in X$ *y*
- *Si* $x \in X$ *satisface* $V\big(T(t)x\big) = V(x)$ *para todo* $t \geq 0$, *entonces* $x \in \mathcal{E}$, *es decir* x *será un equilibrio para el semigrupo.*

2.1.2. El siguiente ejemplo, permite entender adecuadamente las propiedades geométricas de un semigrupo gradiente. Específicamente $T(\cdot)$ se construye a partir del flujo inducido (vea **1.1.5**) del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = -\nabla V(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

donde $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función, no-constante, de clase C^1 y el símbolo $\nabla V(x) = \big(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\big)$ denota el gradiente de V, en el sentido usual. Cada solución maximal $x(t)$ con $x(0) = x_0$ cumple

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -||\nabla V\big(x(t)\big)||^2,$$

y claramente $t \mapsto V(x(t))$ es decreciente, pues la solución está definida en un intervalo. Por otro lado, $V\big(x(t)\big) = V(x), \forall t \geq 0$ implica que $\nabla V\big(x(t)\big)$ es el vector nulo y así $x(t)$ debe ser constante. En estas circunstancias, la clausura de cada órbita (positiva) limitada es un conjunto compacto. Además, son interesantes e ilustrativos los casos para los cuales V es **propia**; es decir, cuando se cumple:

$$V(x) \to \infty \quad \text{si} \quad ||x|| \to +\infty;$$

pues en estas condiciones los niveles de V son conjuntos compactos que siempre son transversales a las trayectorias de (2.1).

[1]Si I, J son subconjuntos de $\mathbb{R}$, una función $f : I \to J$, es llamada **decreciente** (creciente) si $f(s) \leq f(t)$ $(f(s) \geq f(t))$ cuando $s \geq t$. Además si, $f(s) < f(t)$ $(f(s) > f(t))$ para $s > t$ entonces f es **estrictamente decreciente** (estrictamente creciente).

Explícitamente, los siguientes sistemas en el plano

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -ay,$$

inducidos por $V_a(x,y) = \dfrac{x^2 + ay^2}{2}$ admiten a sus conjuntos de nivel como circunferencias o elipses centradas en el origen, siempre que se considere $a > 0$. En especial, el origen de $\mathbb{R}^2$ es un *atractor global* del sistema.

Ejemplo 2.1.3 (reacción - difusión, [10]). *Otro ejemplo (menos trivial) de un semigrupo gradiente es la ecuación escalar de reacción - difusión sobre un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,*

$$u_t - \Delta u = f(u), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2}$$

Si se impone condiciones apropiadas de crecimiento sobre f entonces la ecuación genera un semigrupo sobre $H_0^1(\Omega)$ y la funcional

$$V(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega F(u(x))dx, \qquad F(s) = \int_0^s f(r)dr,$$

es continua de $H_0^1(\Omega)$ en $\mathbb{R}$. Los detalles aparecen en el capítulo 12 del libro [10] (Vea también una de las secciones de [34]).

Para ver que es decreciente a lo largo de las trayectorias, multiplicamos (2.2) *por u_t e integramos sobre Ω, con esto se obtiene*

$$\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(u)u_t = \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u(x,t))dx$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}V(u(t)) = -\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

De esta igualdad se desprende que si $V(u(t))$ es constante, entonces $u_t = 0$, por lo tanto $u(t) = T(t)u$ es constante, así $u \in \mathcal{E}$. Luego, se concluye que V es una función de Lyapunov.

Por **1.3.28** el conjunto $\alpha-$límite satisface: como

$$\alpha(\xi_x) = \left\{y \in X : \exists\ 0 < t_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \text{ con } \lim_{k\to\infty} \xi_x(-t_k) = y\right\},$$

donde ξ_x es una solución global, de $T(\cdot)$, que pasa por x ($\xi_x(0) = x$). Vale recordar que $\alpha(\xi_x)$ es positivamente invariante, tal como aparece en (1.26).

Lema 2.1.4. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo gradiente y sea $\mathcal{E}$, el conjunto de sus equilibrios.*

(a) Si $x \in X$, entonces su $\omega-$límite es un subconjunto de $\mathcal{E}$.

(b) Si $\xi_x : \mathbb{R} \to X$ es la solución global que pasa por $x \in X$, entonces también su conjunto $\alpha-$límite está incluido en $\mathcal{E}$.

Demostración. La parte (a) es trivialmente verdadera cuando $\omega(x) = \emptyset$. Si, por otro lado, $z \in \omega(x)$, entonces existe $t_k \geq 0$ tal que $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ y $\lim_{k\to+\infty} T(t_k)x = z$. Además, $T(\cdot)$ admite una función de Lyapunov $V\colon X \to \mathbb{R}$ (definición 2.1.1). Por la continuidad de $T(\cdot)$ y V,

$$\lim_{k\to\infty} V\big(T(t+t_k)x\big) = \lim_{k\to\infty} V\big(T(t)[T(t_k)x]\big) = V\big(T(t)z\big), \quad \forall t \geq 0.$$

Como V es decreciente a lo largo de la soluciones, por cada $t \geq 0$ se cumple[2]:

$$V(T(t_k)x) \geq V(T(t+t_k)x), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si aquí, $k \to \infty$, se obtiene

$$V(z) = \lim_{k\to\infty} V(T(t_k)x) \geq \lim_{k\to\infty} V(T(t+t_k)x) = V(T(t)z) \geq V(z).$$

Luego $V(T(t)z) = V(z), \forall t \geq 0$. A partir de la definición 2.1.1, se obtiene $z \in \mathcal{E}$. Por tanto, se obtiene (a).

Si $\alpha(\xi_x) = \emptyset$, ($b$) es verdad. Cuando $y \in \alpha(\xi_x) \neq \emptyset$, existe $t_k \geq 0$ tal que $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ y $\lim_{k\to+\infty} \xi_x(-t_k)x = y$. La siguiente composición de la respectiva función de Lyapunov $[0,+\infty) \ni t \mapsto V\big(\xi_x(-t)\big)$ es continua, creciente y acotada superiormente por $V(y)$, es decir $V(y) \geq V\big(\xi_x(-s)\big), \forall s \geq 0$. Consecuentemente,

$$V_\xi = \lim_{k\to\infty} V(\xi_x(-t_k)) \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} V(\xi_x(t-t_k)) = V\big(T(t)y\big), \forall t \geq 0.$$

[2]La desigualdad $V\big(T(s)x\big) \geq V(z), \forall s \geq 0$ se obtiene de las definiciones, pues cada $s \geq 0$ admite una subsucesión con $s \leq t_n$ y así $V\big(T(s)x\big) \geq V\big(T(t_n)x\big) \to V(z)$, decreciendo.

Por otro lado, si $t \geq 0$ se elige una subsucesión t_{k_n} creciente de modo que $t_{k_{n+1}} - t_{k_n} > t$, es decir $-t_{k_n} > t - t_{k_{n+1}} > -t_{k_{n+1}}$. La solución global y la función de Lyapunov satisfacen $V\big(\xi_x(-t_{k_n})\big) \leq V\big(\xi_x(t - t_{k_{n+1}})\big) \leq V\big(\xi_x(-t_{k_{n+1}})\big)$. Así $V\big(T(t)y\big) = V_\xi$ para todo $t \geq 0$ y por eso $y \in \mathcal{E}$ (definición 2.1.1, nuevamente). Se concluye la demostración de (b). $\square$

En la demostración anterior, se observa que para un semigrupo gradiente, la respectiva función de Lyapunov es constante en la órbita de cada elemento del conjunto límite.

Proposición 2.1.5. *Sea $\mathcal{S}_\mathcal{A} \subset X$ un conjunto compacto, invariante con respecto a un semigrupo gradiente cuya función de Lyapunov es $V : X \to \mathbb{R}$. Si $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, el conjunto de equilibrios está ordenado de tal modo que se cumple $V(e_j) \leq V(e_{j+1})$ para $j \leq n-1$, entonces la colección $E_j = \{e_j\}$, de los conjuntos unitarios, es una descomposición de Morse de $\mathcal{S}_\mathcal{A}$.*

Demostración. La colección $E_j = \{e_j\}$ verifica las condiciones del teorema 1.4.14.

(1) Cada $E_j = \{e_j\} \subset S_\mathcal{A}$ es compacto e invariante.

(2) Los conjuntos E_j son disjuntos dos a dos, y así existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{O}_\epsilon(E_i) \cap \mathcal{O}_\epsilon(E_j) = \emptyset$ cuando $1 \leq i < j \leq n$.

(3) Por cada solución global ξ_x que pasa por $x \in S_\mathcal{A}$ se tiene

- Si $x = e_i$, entonces $\xi_x(\mathbb{R}) = \{e_i\} = E_i$.
- Si $x \in S_\mathcal{A} \setminus \mathcal{E}$, por el lema 2.1.4, $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ y $\alpha(\xi_x) \subset \mathcal{E}$.

Además, si el conjunto límite $\omega(x) = \{e_i\}$, la condición $V(e_i) \leq V(e_{i+1})$ y la continuidad de $V \circ \xi_x$ permite probar sin dificultad que la imagen $V(\xi_x(\mathbb{R}))$ es igual al intervalo abierto $\big]V(e_i), V(e_{i+1})\big[$. De aquí se desprende que $\alpha(\xi_x) = \{e_{i+1}\}$. Por lo tanto, la colección $E_j = \{e_j\}$ es una descomposición de Morse de $S_\mathcal{A}$ (definición 1.4.7). $\square$

El siguiente teorema (presentado en el libro [10]) describe algunas propiedades dinámicas del semigrupo gradiente bajo algunas condiciones técnicas que no solo permiten entender los conjuntos límite, sino también garantizan la existencia del atractor global, de acuerdo con las propiedades introducidas en el capítulo anterior.

Teorema 2.1.6. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo gradiente, acotado*[3] *y asintóticamente compacto. Si $\mathcal{E}$, su conjunto de equilibrios, es acotado, entonces $\omega(x)$ atrae a x cuando $x \in X$ y existe un atractor global $\mathcal{A}$ para $T(\cdot)$. Si adicionalmente el conjunto de equilibrios $\mathcal{E}$ sólo admite puntos aislados, entonces para cada $x \in X$, existe un equilibrio $e \in \mathcal{E}$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)x = e. \tag{2.3}$$

Demostración. Cada órbita positiva $\gamma^+(x)$ es acotada. Como $T(\cdot)$ es asintóticamente compacto, de la proposición 1.3.23 se sigue que $\omega(x)$ atrae a x. Además, por el lema 2.1.4, se tiene $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ para cada $x \in X$, con $\mathcal{E}$ un conjunto acotado. Así, $T(\cdot)$ es disipativo por puntos:

$$\exists \mathcal{E} \subset X \text{ (acotado): } \lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)x, \mathcal{E}\big), \quad \forall x \in X.$$

En ese contexto, el semigrupo satisface todas las hipótesis del corolario 1.3.26, de donde se desprende que $T(\cdot)$ admite un atractor global, que viene dado por

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_B \Big\{\omega(B) : B \subset X, B \text{ es acotado}\Big\}}.$$

Por otro lado, como $\omega(x)$ es compacto (proposición 1.3.23) y atrae al conexo $\{x\}$, se concluye que el propio conjunto límite $\omega(x)$ es conexo (corolario 1.2.8). Por tanto, cuando $\mathcal{E}$ es un conjunto de puntos aislados se sigue que $\omega(x)$ es un conjunto unitario, y se obtiene (2.3). Por lo tanto se cumple el teorema. ☐

[3]Un semigrupo $T(\cdot)$ es **acotado** si por cada conjunto acotado $B \subset X$ su respectiva órbita positiva $\gamma^+(B) = \{T(t)B : t \geq 0\}$ es acotada.

El siguiente corolario toma en cuenta los resultados del teorema 2.2 dado en el libro [5], donde aparece la definición de atractor global, universalmente aceptada.

Corolario 2.1.7. *Si $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente y asintóticamente compacto entonces el conjunto de equilibrios $\mathcal{E}$ satisface*

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)x,\mathcal{E}\big)=0, \qquad \textit{para todo} \qquad x\in X.$$

Demostración. Como antes, la proposición 1.3.23 revela que por cada $x\in X$, su respectivo conjunto $\omega(x)$ atrae a x. Además en el lema 2.1.4 se vio que la función de Lyapunov permite expresar que $\omega(x)\subset\mathcal{E}$. Pero, el acápite **1.1.3** muestra que

$$d_H\big(T(t)x,\mathcal{E}\big)\le d_H\big(T(t)x,\omega(x)\big).$$

Por lo tanto, se cumple el corolario. □

En lo que sigue, se demostrará que la estructura del atractor global, para algunos sistemas gradientes depende fuertemente del conjunto de equilibrios y su conjunto inestable, que se define a continuación (note que se admite la existencia de la solución global).

Definición 2.1.8. *Sea $E\subset X$ un conjunto invariante para el semigrupo $T(\cdot)$. El **conjunto inestable** de E se denota por $W^u(E)$ y está formado por todos los elementos $z\in X$ para los cuales existe una solución global $\xi_z\colon\mathbb{R}\to X$ que pasa por z y satisface $d_H\big(\xi_z(s),E\big)\to 0$ cuando $s\to-\infty$. Es decir*

$$W^u(E)=\big\{z\in X:\exists\,\xi_z:\mathbb{R}\to X \text{ y } \lim_{s\to-\infty} d_H\big(\xi_z(s),E\big)=0\big\}. \tag{2.4}$$

2.1.9. La útil condición de aproximación dada por el límite:

$$\lim_{s\to-\infty} d_H\big(\xi_z(s),E\big)=0,$$

es equivalente a decir que por cada $\varepsilon>0$ existe una constante $t_{(z,\varepsilon)}>0$ tal que

$$\xi_z(s)\in\mathcal{O}_\varepsilon(E) \qquad \text{cuando} \qquad s\le -t_{(z,\varepsilon)}.$$

En estas circunstancias, cuando se fijan $z \in W^u(E)$ y $t \geq 0$, cada $\epsilon > 0$ genera una constante positiva $t_{(z,\epsilon)} + t > 0$ de manera que la imagen $\xi_z(s+t)$ pertenece a la vecindad $\mathcal{O}_\epsilon(E)$ cuando $s \leq -(t_{(z,\epsilon)} + t)$. Por consiguiente, la ecuación (1.27) posibilita conseguir que

$$\big(z \in W^u(E) \text{ y } t \geq 0\big) \implies \lim_{s\to-\infty} d_H\big(\xi_{T(t)z}(s), E\big) = 0.$$

En otras palabras, $W^u(E)$ es positivamente invariante. Análogamente, cuando $z \in W^u(E)$ y $t \geq 0$, el punto $w = \xi_x(-t)$ satisface la igualdad $T(t)w = z$ y la regla $\mathbb{R} \ni s \mapsto \xi_x(s-t) \in X$ genera una solución que pasa por w, para la cual se cumple $\lim\limits_{s\to-\infty} d_H\big(\xi_w(s), E\big) = \lim\limits_{s\to-\infty} d_H\big(\xi_z(s), E\big) = 0$; en tal sentido el conjunto $W^u(E)$ está incluido en $T(t)W^u(E)$. Por eso,

$$W^u(E) \text{ es invariante.}$$

Por otro lado, de las propiedades expuestas en **1.1.3** se infiere la validez de la igualdad $d_H\big(\xi_z(s), E\big) = d\big(\xi_z(s), E\big)$, para cualquier elemento $s \in \mathbb{R}$. Por tal motivo, cuando $E = \{e\}$ está formado por un equilibrio, la condición de convergencia dada en (2.4) es

$$\lim_{s\to-\infty} d(\xi_z(s), e) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{s\to-\infty} \xi_z(s) = e.$$

En este caso, el conjunto límite $\alpha(\xi_z)$ es conexo, por ser la intersección de los compactos conexos $\overline{\xi_z\big((-\infty, -n]\big)}$ con $n \in \mathbb{N}$. Así:

$$W^u\big(\{e_1, \ldots, e_n\}\big) = \bigcup_{i=1}^{n} W^u(e_i)$$

cuando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ son equilibrios [5, página 158].

Ejemplo 2.1.10. *Se considera los conjuntos invariantes*

$$E_1 = \{(0,0)\}, \quad E_2 = \partial D_{\sqrt{2}} \; \textit{y} \; E_3 = \partial D_1$$

para el semigrupo generado por el sistema dado en el ejemplo 1.3.18. Los conjuntos inestables de cada E_j son:

$$W^u(E_1) = E_1, \quad W^u(E_2) = E_2 \; \textit{y} \; W^u(E_3) = int(D_{\sqrt{2}}) \backslash E_1.$$

Además se observa que cuando los conjuntos invariantes son atractores locales, estos coinciden con sus conjuntos inestables.

Observación 2.1.11. *Para los conjuntos hiperbólicos inducidos por flujos, su conjunto inestable se convierte en una subvariedad inmersa [21, 17]. En este ámbito, los sistemas lineales de* **1.1.5** *inducidos por matrices, cuyos autovalores* no *son imaginarios puros admiten al origen como un "equilibrio hiperbólico" y su conjunto inestable es una subvariedad, inmersa en el espacio euclidiano [22]. Algunos resultados interesantes, que están relacionados, aparecen en los trabajos [7, 9].*

El siguiente lema, que también aparece en [10], permitirá formalizar algunas propiedades básicas que se presentan durante el desenvolvimiento y exposición del presente trabajo.

Lema 2.1.12. *Sea $X_t \subset X$ un compacto conexo en el espacio métrico X con el parámetro $t \geq 0$. Si la familia de compactos conexos satisface $X_t \subseteq X_s$ cuando $t \geq s$, entonces la intersección total*

$$\mathbb{X} = \bigcap_{t \geq 0} X_t$$

también es un conjunto conexo.

Demostración. Se usa la teoría clásica de los espacios compactos y conexos descrita en [25, página 171]. El paso inicial es:

$$d_H(X_t, \mathbb{X}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty. \tag{2.5}$$

Se procede por el absurdo: existe $\varepsilon > 0$, $t_n \to +\infty$ y $x_n \in X_{t_n}$ con $d(x_n, \mathbb{X}) > 2\varepsilon$. La compacidad de X_0 justifica escribir $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in X_0$. Por otro lado, cada parámetro positivo $t > 0$, admite un elemento de la sucesión para el cual $t < t_k$, es decir $X_{t_k} \subset X_t$. Por la compacidad de X_{t_k} y las inclusiones $X_{t_k} \supset X_{t_{k+1}} \supset \cdots \supset X_{t_{k+m}} \supset \cdots$, el límite anterior $x = \lim\limits_{m \to +\infty} x_{k+m} \in X_{t_k} \subset X_t$. En otras palabras, $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in \mathbb{X}$. Al hacer $n \to +\infty$ en los extremos de las siguientes desigualdades $2\varepsilon \leq d(x_n, \mathbb{X}) \leq d(x_n, x) + d(x, \mathbb{X})$ se concluye $\varepsilon < d(x, \mathbb{X}) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, (2.5) es verdadero.

Para la conexidad de $\mathbb{X}$ se procede por el absurdo. Existen dos conjuntos disjuntos $\mathbb{X}_1 \neq \emptyset$ y $\mathbb{X}_2 \neq \emptyset$ junto a sus respectivas vecindades abiertas $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ de modo que $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$ y $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. En particular, existe $\delta > 0$ de modo que $d(x_1, x_2) \geq \delta$ si $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$. Por (2.5), cuando t es suficientemente grande se cumple $d_H(X_t, \mathbb{X}) < \frac{\delta}{3}$. Aquí aparecen dos situaciones complementarias: (i): X_t es disconexo. (ii): $X_t \cap \mathcal{O}_i = \emptyset$ para algún $i = 1$ o $i = 2$. El caso (i) es una contradicción con la hipótesis. El caso (ii) implica que $X_t \supset \mathbb{X}_1$ o $X_t \supset \mathbb{X}_2$, luego $d_H(X_t, \mathbb{X}) \not< \frac{\delta}{3}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{X}$ es conexo. □

2.1.13. De la solución global $\xi_z \colon \mathbb{R} \to X$ de un semigrupo gradiente, cuyo conjunto de equilibrios $\mathcal{E} \neq \emptyset$ satisface $d(\xi_z(t), \mathcal{E}) \to 0$ si $t \to -\infty$ se obtiene, la compacidad de cada $\overline{\bigcup_{s\leq t} \xi_z(s)}$ cuando $t \leq 0$, y así la intersección $\bigcap_{t\leq 0} \overline{\bigcup_{s\leq t} \xi_z(s)}$ también es compacta. Por otro lado, la conexidad de $]-\infty, t]$ y la continuidad de ξ_z implica que la familia $X_t = \overline{\bigcup_{s\leq t} \xi_z(s)}$ con el parámetro $t \in (-\infty, 0]$ está formada por compactos conexos, todos ellos encajados. El lema 2.1.12 garantiza que $\bigcap_{t\leq 0} X_t$ es conexo. Como la intersección anterior es $\alpha(\xi_z)$ se concluye

$$\alpha(\xi_z) \text{ es conexo.} \tag{2.6}$$

Teorema 2.1.14. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si el semigrupo es gradiente y $\mathcal{E}$ es el conjunto de sus equilibrios, entonces $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$. En particular, cuando $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ (finito), se cumple la siguiente igualdad*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n} W^u(e_i). \tag{2.7}$$

Demostración. Por el corolario 1.3.12, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Además por cada $x \in \mathcal{A}$, la respectiva solución global ξ_x no solo $\alpha(\xi_x) \cup \xi_x(\mathbb{R}) \cup \omega(x) = \overline{\xi_x(\mathbb{R})} \subset \mathcal{A}$ sino también $\alpha(\xi_x) \neq \emptyset$. Además, desde que $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente, el lema 2.1.4 refiere que $\alpha(\xi_x) \subset \mathcal{E}$ y se obtiene $\lim_{t\to+\infty} d(\xi_x(-t), \mathcal{E}) = 0$, es decir $x \in W^u(\mathcal{E})$ y se concluye

$$\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E}).$$

Por otro lado, cuando $y \in W^u(\mathcal{E})$ la solución global $\xi_y : \mathbb{R} \to X$ satisface $d(\xi_y(t), \mathcal{E}) \to 0$ cuando $t \to \pm\infty$, pues $\alpha(\xi_y) \cup \omega(y) \subset \mathcal{E}$ (lema 2.1.4). En consecuencia, la órbita $\xi_y(\mathbb{R})$ y su clausura $\overline{\xi_y(\mathbb{R})} = \alpha(\xi_y) \cup \xi_y(\mathbb{R}) \cup \omega(y)$ son conjuntos acotados. Como $\overline{\xi_y(\mathbb{R})}$ también es invariante, se obtiene que el atractor global $\mathcal{A} \supset \overline{\xi_y(\mathbb{R})}$ (proposición 1.3.11). Es decir, $y = \xi_y(0) \in \mathcal{A}$ y se concluye $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$. Por lo tanto

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}).$$

Para demostrar (2.7) se procede por doble inclusión. Si $x \in \mathcal{A}$, la inclusión $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$ y (2.6) (vea lema 2.1.4) muestran que $\alpha(\xi_x)$ es un subconjunto unitario del conjunto finito[4] $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. En otras palabras, $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^n W^u(e_i)$ y se tiene: $\mathcal{A} \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^n W^u(e_i)$. Por otro lado, si $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^n W^u(e_i)$ y $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ se sigue que $x \in W^u(\mathcal{E})$, donde $W^u(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$, es decir $x \in \mathcal{A}$ y se concluye que $\bigcup_{i=1}^n W^u(e_i) \subset \mathcal{A}$. Esto prueba (2.7) y se concluye la demostración. $\square$

2.2 Comportamiento del atractor local

En la sección 1.4 se examinaron las propiedades dinámicas de un atractor local (débil), el cual siempre está incluido en un compacto invariante, previamente fijado. En otras palabras, se estudió el comportamiento dinámico de la restricción del semigrupo a tal compacto, que no se modificó en toda la descripción (1.29). En la presente sección, se revisa éste concepto en el caso especial del atractor global que siempre es un compacto invariante y se estudiará su relación con los conceptos del capítulo anterior.

[4]El resultado de obtener un conjunto límite unitario se preserva cuando $\mathcal{E}$ es **totalmente disconexo**, en el sentido de admitir a los conjuntos unitarios como únicos subconjuntos conexos.

Definición 2.2.1. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A} \subset X$. Un subconjunto $A \subset \mathcal{A}$ es llamado un* ***atractor local del semigrupo*** *si*

$$\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) = A, \quad \textit{para algún} \quad \epsilon > 0.$$

En este contexto, el ***repulsor*** *A^* asociado con atractor local A es el conjunto definido por*

$$A^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap A = \phi\}.$$

El par (A, A^*) es llamado el ***par atractor-repulsor para*** *$T(\cdot)$.*

Ejemplo 2.2.2. *A manera de ilustración de este concepto se presentan algunos atractores locales que se construyen dentro del atractor global $\mathcal{A} = D_{\sqrt{2}}$ encontrado en el ejemplo 1.3.18. Específicamente, ellos son:*

$$A_0 = \emptyset, \ \ A_1 = \{(0,0)\}, \ \ A_2 = \{(0,0)\} \cup \partial D_{\sqrt{2}} \ \ \textit{y} \ \ A_3 = D_{\sqrt{2}} = \mathcal{A}.$$

En este contexto, cada uno de estos conjuntos cumplen $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A_j)) = A_j$ para algún $\epsilon > 0$ cuando $0 \leq j \leq 3$, siendo sus respectivos repulsores asociados

$$A_0^* = \mathcal{A}, \ \ A_1^* = D_{\sqrt{2}} \setminus \mathrm{int}(D_1), \ \ A_2^* = \partial D_1 \ \ \textit{y} \ \ A_3^* = \emptyset$$

donde $\mathrm{int}(D_1)$ significa el interior de D_1. Además se observa que

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 = \mathcal{A}$$

y

$$\emptyset = A_3^* \subset A_2^* \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A}.$$

A continuación se presenta no solo una relación ilustrativa del concepto ‘atractor local del semigrupo’ con la condición que aparece en (1.29), sino también una útil caracterización.

Proposición 2.2.3. *Sea $S_{\mathcal{A}} \subset X$ un compacto, invariante para $T(\cdot)$.*

(a) Si el compacto A está en el interior[5] *de $S_{\mathcal{A}}$, son equivalentes:*

($a1$) Existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega\big(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A$.

($a2$) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big) = A$.

(b) Si $\mathcal{A} = S_{\mathcal{A}}$ es un atractor global, son equivalentes:

($b1$) $A \subset \mathcal{A}$ es un atractor local.

($b2$) A es compacto, invariante y atrae $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$, para algún $\varepsilon > 0$.

Demostración. ($a2 \Rightarrow a1$): La inclusión $\mathcal{O}_\delta(A) \cap S_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{O}_\delta(A)$ implica fácilmente que $\omega\big(\mathcal{O}_\delta(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \subset \omega\big(\mathcal{O}_\delta(A)\big)$; por ($a2$) se obtiene

$$\omega\big(\mathcal{O}_\delta(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \subset A. \tag{2.8}$$

Por otro lado, si $A \subset \mathcal{O}_\delta(A) \subset S_{\mathcal{A}}$ con $\delta > 0$ entonces $A = A \cap S_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{O}_\delta(A) \cap S_{\mathcal{A}}$. Desde que $A = \omega\big(\mathcal{O}_\delta(A)\big)$ es invariante se obtiene

$$A = \omega(A) \subset \omega\big(\mathcal{O}_\delta(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big). \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9) se tiene ($a1$), para algún $0 < \epsilon < \text{mín}\{\delta, \varepsilon\}$.

($a1 \Rightarrow a2$): Por la proposición 1.4.3, para $0 < \delta < \epsilon$, existe $t_0 = t_0(\delta) \geq 0$ tal que $T(t)\big(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) \subset \mathcal{O}_\delta(A), \forall t \geq t_0$; luego se verifica la inclusión $\omega\big(T(t)(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}})\big) \subset \omega\big(\mathcal{O}_\delta(A)\big)$. Desde que $A = \omega\big(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = \omega\big(T(t)(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}})\big)$ se tiene

$$A \subset \omega\big(\mathcal{O}_\delta(A)\big) \tag{2.10}$$

En particular, para algún $0 < \delta < \epsilon$ con $\mathcal{O}_\delta(A) \subset \mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}$ se cumple

$$\omega\big(\mathcal{O}_\delta(A)\big) \subset \omega\big(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap S_{\mathcal{A}}\big) = A \tag{2.11}$$

De (2.10) y (2.11) se concluye ($a2$). Por lo tanto, (a) es verdadero.

[5] La condición sobre A, de estar formado por puntos interiores de $S_{\mathcal{A}}$, se mejorará notablemente. Es más, la proposición 2.2.9 garantiza la equivalencia de todos los puntos de esta proposición 2.2.3 cuando $S_{\mathcal{A}}$ es un atractor global.

($b1 \Rightarrow b2$): Por el teorema 1.4.4, $A \subset \mathcal{A}$ es invariante y compacto. Para demostrar que A atrae algún $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$, se procederá por el absurdo y se asume que $d_H\big(T(t)(\mathcal{O}_\epsilon(A)), A\big) \nrightarrow 0$ cuando $t \to \infty$ o equivalentemente: para t suficientemente grande,

$$\sup_{x\in\mathcal{O}_\epsilon(A)} d(T(t)x, A) = d_H\big(T(t)(\mathcal{O}_\epsilon(A)), A\big) > 0.$$

Por la definición de supremo, se elige $\gamma_t > 0$, con $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_t = 0^+$ de modo que existe $a \in \mathcal{O}_\epsilon(A)$ tal que

$$0 \leq d_H(T(t)\mathcal{O}_\epsilon(A), A) - \gamma_t < d(T(t)a, A).$$

Por ($b1$), $A = \omega\big(\mathcal{O}_\epsilon(A)\big) : \lim\limits_{t\to+\infty} d\big(T(t)a, A\big) = 0$, luego $d_H\big(T(t)\mathcal{O}_\epsilon(A), A\big) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Esta contradicción, muestra que el segundo ítem ($b2$) se cumple.

($b2 \Rightarrow b1$): Se considera que A atrae a $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para algún $\varepsilon > 0$, es decir

$$d_H\big(T(t)\mathcal{O}_\varepsilon(A), A\big) \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{2.12}$$

De esta última relación y el corolario 1.2.7 se obtiene que $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big)$ es un subconjunto de A. Con esto se obtiene el ítem ($b1$) pues $A = \omega(A) \subset \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big)$. Por lo tanto, se cumple (b). $\square$

Observación 2.2.4. *Del sistema de ecuaciones diferenciales dado en el ejemplo 1.3.18 se infiere que el semigrupo $T(\cdot)$ admite al conjunto*

$$S_{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

como un compacto invariante. El conjunto unitario $\{(0, 0)\} \subset S_{\mathcal{A}}$ satisface el ítem (a) de la proposición 2.2.3, sin embargo se puede encontrar conjuntos compactos $A \subset S_{\mathcal{A}}$ para los cuales ($a1$) y ($a2$) ya no son equivalentes.

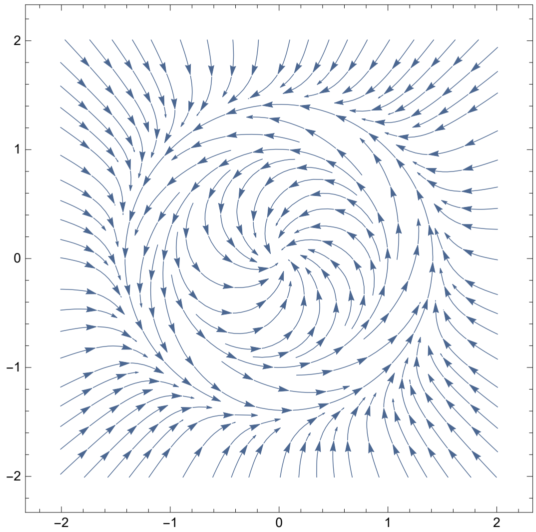

Figura 2.1: Ejemplo 1.3.18

2.2.1 Relación entre el atractor débil y el conjunto inestable.

Se estudian los puntos de la proposición 2.2.3 cuando los atractores locales (débiles) se consideran dentro del atractor global del semigrupo. El resultado más utilizado aparece en el teorema 2.2.11 y se darán algunos corolarios vinculados al concepto de conjunto inestable. Para tal fin, el siguiente lema es adecuado.

Lema 2.2.5. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor global para $T(\cdot)$. Si A satisface las condiciones:*

1. *El conjunto $A \subset \mathcal{A}$ es un compacto, invariante respecto a $T(\cdot)$.*
2. *Existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que A atrae a la intersección $\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap \mathcal{A}$.*

Entonces, por cada $\delta \in (0, \varepsilon)$ existe un $\delta' \in (0, \delta)$ de modo que

$$\bigcup_{t \geq 0} T(t)x \subset \mathcal{O}_\delta(A), \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathcal{O}_{\delta'}(A).$$

Es decir, la órbita positiva $\gamma^+\big(\mathcal{O}_{\delta'}(A)\big) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)} \bigcup_{t \geq 0} T(t)x \subset \mathcal{O}_\delta(A)$.

Demostración. Si la conclusión es falsa, existiría un $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$\gamma^+\big(\mathcal{O}_{\delta'}(A)\big) \not\subset \mathcal{O}_\delta(A), \quad \text{para todo} \quad \delta' \in (0, \delta).$$

Para $\delta' = \dfrac{\delta}{2n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{O}_{\delta'}(A) \setminus A$ y $t_n \geq 0$ de modo que

$$T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(A), \quad \forall t \in [0, t_n); \quad d\big(T(t_n)x_n, A\big) = \delta \quad \text{y} \quad t_n < t_{n+1}. \tag{2.13}$$

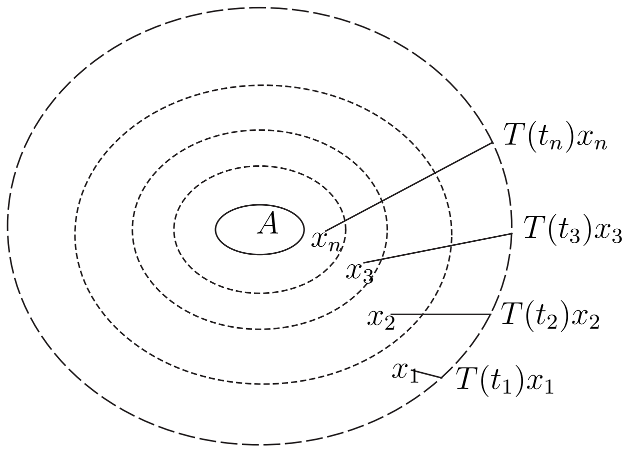

Figura 2.2: Construcción en el lema 2.2.5

La continuidad de las funciones $\mathbb{R} \ni t \mapsto x_n \in X$, $t \mapsto (t_n + t, x_n) \in [0, +\infty) \times X$ y $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ (definición 1.1.4) implica que la función $\xi_n : \mathbb{R} \to X$, $n \in \mathbb{N}$ definida por

$$\xi_n(t) := \begin{cases} x_n, & t \in (-\infty, -t_n); \\ T(t + t_n)x_n, & t \in [-t_n, +\infty). \end{cases}$$

es continua. Además, para $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\xi_n(t) = T(t)T(t_n)x_n, \forall t \geq 0$. Por otro lado, como $\mathcal{O}_\delta(A)$ es acotado y secuencialmente compacto, es posible conseguir la convergencia. Esta se hace explícita en la siguiente afirmación, motivada por el proceso descrito en la prueba del lema 2.5.2 de [30] (vea [11, lema 3.1]).

Afirmación. *Existe una subsucesión ξ_k tal que $\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{\xi} \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k(t)$ es continua.*

(a.0) La compacidad de $\{x : d(x, A) = \delta\}$ induce un conjunto infinito de números naturales $N_0 \subset \mathbb{N}$ que genera una subsucesión convergente, es decir

$$\exists\, y_0 = \lim_{m \xrightarrow{m \in N_0} +\infty} T(t_m)x_m, \quad \text{con} \quad d(y_0, A) = \delta.$$

Con esto, se define $\xi(t) = T(t)y_0$ cuando $0 \leq t$.

(a.1) Por la compacidad de $\overline{\mathcal{O}}_\delta(A)$ (que satisface $T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(A), \forall t \in [0, t_n)$) la sucesión creciente t_n induce un conjunto $N_1 \subset N_0$ (infinito) tal que

$$t_m > 1 \quad \forall m \in N_1, \quad \text{y} \quad \exists\, y_1 = \lim_{m \xrightarrow{m \in N_1} +\infty} T(t_m - 1)x_m \in \overline{\mathcal{O}}_\delta(A).$$

Se define $\xi(t) = T(t+1)y_1$ para $-1 \leq t < 0$ y se obtiene la continuidad de ξ en $[-1, +\infty)$ pues[6]

$$\lim_{t \to 0-} \xi(t) = T(1)y_1 = \lim_{m \xrightarrow{m \in N_1} +\infty} T(1)T(t_m - 1)x_m = \xi(0).$$

(a.2) Análogamente, existe un conjunto infinito $N_2 \subset N_1$ tal que

$$t_m > 2 \quad \forall m \in N_2, \quad \text{y} \quad \exists\, y_2 = \lim_{m \xrightarrow{m \in N_2} +\infty} T(t_m - 2)x_m \in \overline{\mathcal{O}}_\delta(A).$$

La regla $\xi(t) = T(t+2)y_2$ para $-2 \leq t < -1$ induce la continuidad de ξ en $[-2, +\infty)$ ya que

$$\lim_{t \to -1-} \xi(t) = T(1)y_2 = \lim_{m \xrightarrow{m \in N_2} +\infty} T(1)T(t_m - 2)x_m = \xi(-1).$$

(a.3) Se construyen infinitos conjuntos $\mathbb{N} \supset N_0 \supset N_1 \supset \cdots \supset N_j \supset \cdots$, de modo que por cada $j = 0, 1, \ldots$

$$t_m > j \quad \forall m \in N_j, \quad \text{y} \quad \exists\, y_j = \lim_{m \xrightarrow{m \in N_j} +\infty} T(t_m - j)x_m \in \overline{\mathcal{O}}_\delta(A).$$

[6] Recordar que en un espacio métrico, por cada sucesión convergente, todas sus respectivas subsucesiones son convergentes y tienden al límite de la sucesión.

Con este procedimiento, se obtiene una función continua $\xi : \mathbb{R} \to X$ que se escribe:

$$\xi(t) = \begin{cases} T(t)y_0, & t \geq 0 \\ T(t+1)y_1, & -1 \leq t < 0 \\ T(t+2)y_2, & -2 \leq t < -1 \\ \quad\vdots & \\ T(t+j)y_j, & -j \leq t < -(j-1) \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

(b) Por el proceso de la diagonal de Cantor [25, página 50], se define el conjunto infinito $N_* \subset \mathbb{N}$ en el cual su $k-$ésimo elemento es el respectivo $k-$ésimo término de N_k en el orden usual de los números reales.

Se considera la subsucesión ξ_k con $k \in N_*$.

(c) Si $t \geq 0$, se cumple

$$\lim_{k \xrightarrow{k \in N_*} +\infty} \xi_k(t) = \lim_{k \xrightarrow{k \in N_*} +\infty} T(t)T(t_k)x_k = T(t)y_0 = \xi(t).$$

Si $t < 0$, se elige $j \in \mathbb{N}$ de manera que $-j \leq t < -(j-1)$, por eso cuando $k \geq j$ con $k \in N_*$ se cumple $t_k \geq j$. De la propiedad del semigrupo, se tiene que $T(t+t_k)x_k = T(t+j)T(t_k-j)x_k$ y al hacer crecer $k \in N^*$ se obtiene

$$\lim_{k \xrightarrow{k \in N_*} +\infty} \xi_k(t) = T(t+j) \lim_{k \xrightarrow{k \in N_*} +\infty} T(t_k - j)x_k = T(t+j)y_j = \xi(t).$$

Por lo tanto, la subsucesión satisface

$$\lim_{k \to +\infty} \xi_k(t) = \xi(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

y se concluye la prueba de la afirmación escrita en la página 78.

A partir de la afirmación se obtiene que la función límite $\xi : \mathbb{R} \to X$ es continua y satisface $\xi(s+r) = T(r)\xi(s)$ para cualquier par (r,s) en $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$, es decir:

$$\xi : \mathbb{R} \to X \text{ es una solución global de } T(\cdot). \tag{2.14}$$

Para obtener (2.14), se considera $r \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}$ entonces existe m tal que $s + t_{m+n} > 0$ cuando $n \geq 0$, en consecuencia, la definición de ξ_{m+n} implica que para todo $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \xi_{m+n}(r+s) &= T(r+s+t_{m+n})x_{m+n} \\ &= T(r)T(s+t_{m+n})x_{m+n}, \quad T(\cdot) \quad \text{es un semigrupo} \\ &= T(r)\xi_{m+n}(s). \end{aligned}$$

Como $\xi_{m+n}(r+s) \xrightarrow{m+n\to+\infty} \xi(r+s)$, por la continuidad de $T(r)$ y la unicidad de límite se obtiene que

$$\xi(r+s) = \lim_{n\to\infty} T(r)\xi_{m+n}(s) = T(r)\xi(s).$$

Por lo tanto ξ satisface (2.14).

Por otro lado, las condiciones de la ecuación (2.13) y la definición de ξ_n implican (vea figura 2.2.1)

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= x_n, \quad \forall t \leq -t_n \\ \xi_n(t) &= T(t+t_n)x_n \in \mathcal{O}_\delta(A), \quad \forall t \in (-t_n, 0) \\ \xi_n(0) &= T(t_n)x_n \in \overline{\mathcal{O}_\delta(A)}; \end{aligned}$$

y por eso su límite satisface

$$\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(A)}, \forall t \leq 0.$$

En otras palabras, para la constante $0 < \delta < \varepsilon$, la proposición 1.3.31 y (2.13) muestran que la solución global satisface

$$\xi(t) \in \mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{O}_\delta(A)} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A), \quad \forall t \leq 0 \quad y \quad d(\xi(0), A) = \delta > 0.$$

En este contexto, el compacto invariante $\alpha(\xi)$ no es vacío y está incluido en la intersección $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ (proposición 1.3.29). Desde que A atrae $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A)$, se tiene que $0 = \lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)\alpha(\xi), A\big) = \lim_{t\to+\infty} d_H\big(\alpha(\xi), A\big) = d_H\big(\alpha(\xi), A\big)$, y en consecuencia el conjunto límite $\alpha(\xi) \subset A$. Por el teorema 1.4.4, la órbita $\xi(\mathbb{R})$ también es parte de A, en especial $\xi(0) \in A$. Ésta contradicción con la propiedad $d(\xi(0), A) = \delta > 0$ concluye la demostración del lema. $\square$

El siguiente corolario describe el comportamiento de los compactos del atractor global, disjuntos del repulsor.

Corolario 2.2.6. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor global para $T(\cdot)$. Si el compacto $A \subset \mathcal{A}$ admite una constante $\varepsilon > 0$ para la cual se cumple $A = \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap \mathcal{A}\big)$. Entonces por cada compacto $K \subset \mathcal{A}$ se cumple*

$$\lim_{t\to+\infty} d_H\big(T(t)K, A\big) = 0,$$

cuando K es disjunto del repulsor $A^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap A = \emptyset\}$.

Demostración. A partir de los argumentos y métodos presentados en la proposición 2.2.3, es posible concluir que el conjunto A es un compacto e invariante que atrae a cada vecindad de la forma $\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap \mathcal{A}$ cuando la constante $0 < \epsilon \leq \varepsilon$. En ese sentido, el conjunto A satisface las hipótesis del lema 2.2.5.

Para concluir con la demostración del presente corolario se procede por el absurdo. Por tal motivo, se asume que el conjunto A no atrae al compacto K. Esto significa que existe una constante positiva $\delta > 0$, junto a las sucesiones $t_n < t_{n+1}$ y $x_n \in K$ de modo que

$$\delta \leq d(T(t_n)x_n, A) \quad \text{y} \quad x = \lim_{n\to+\infty} x_n \in K.$$

En este contexto, para cada $0 < \tilde{\delta} < \min\{\varepsilon, \delta\}$, existe una constante $\delta' \in (0, \tilde{\delta})$ para la cual la órbita positiva $\gamma^+\big(\mathcal{O}_{\delta'}(A)\big)$ está íntegramente contenida en $\mathcal{O}_{\tilde{\delta}}(A)$, la vecindad generada por la constante inicial $\tilde{\delta} > 0$ (lema 2.2.5). De aquí se infiere, fácilmente que para tal constante $0 < \delta' < \varepsilon$ se cumple

$$d(T(t)x, A) \geq \delta', \quad \forall t \in [0, t_n].$$

Luego, cuando se hace $t_n \to +\infty$ se obtiene que por cada $t \geq 0$ la distancia $d(T(t)x_n, A) \geq \delta'$ y así $\omega(x) \cap A = \emptyset$. Es decir, $x \in A^* \cap K$. Esta contradicción muestra que A atrae al compacto K. $\square$

Corolario 2.2.7. *Sea (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$ con $\mathcal{A}$ un atractor global y sea $\xi_x : \mathbb{R} \to X$ una solución global que pasa por $x \in X$. Si existe $\delta > 0$ de modo que*

$$\xi_x(-t) \in \mathcal{O}_\delta(A^*),\ \forall t \geq 0 \quad \textit{y} \quad \mathcal{O}_\delta(A^*) \cap A = \emptyset,$$

entonces $\lim\limits_{s\to-\infty} d_H\big(\xi_x(s), A^*\big) = 0$.

Demostración. El atractor global es un acotado que también atrae a $x \in X$; además por la condición en el conjunto $\{\xi_x(s) \colon s \leq 0\}$ se obtiene que $\xi_x(\mathbb{R})$ es una órbita acotada. En tal sentido, $\xi_x(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ (proposición 1.3.31).

Si la conclusión del corolario fuese falsa, existiría una constante positiva $\delta' > 0$ y una sucesión creciente $t_n < t_{n+1}$ para la cual se cumple $d(\xi_x(-t_n), A^*) \geq \delta'$. Además, tal constante satisface $\delta' < \delta$, pues $\xi_x(-t) \in \mathcal{O}_\delta(A^*),\ \forall t \geq 0$. Con esto, se define el siguiente subconjunto del atractor global

$$K = \{z \in \mathcal{A} : d(z, A^*) \geq \delta'\},$$

que resulta ser un compacto, disjunto del repulsor que contiene $\{\xi_x(-t_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, la hipótesis del corolario $\mathcal{O}_\delta\,(A^*) \cap A = \emptyset$ garantiza que la distancia $d(A, A^*) = r$ positiva satisface $r \geq \delta$. Cuando $r = \delta$, la clausura $\overline{\mathcal{O}_\delta\,(A^*)}$ intersecta al atractor local A,entonces podrían suceder dos casos (i): $\alpha(\xi_x) \cap A \neq \emptyset$. (ii): $\alpha(\xi_x) \cap A = \emptyset$ (pues $\alpha(\xi_x) \subset \overline{\mathcal{O}_\delta\,(A^*)}$). En (i), el teorema 1.4.4 muestra que $\xi_x(\mathbb{R}) \subset A$, lo cual contradice la hipótesis. En (ii), se usa el compacto invariante $\alpha(\xi_x)$ y se tiene que cada elemento $y \in \alpha(\xi_x)$ satisface $\omega(y) \cap A = \emptyset$, es decir $\alpha(\xi_x) \subset A^*$. Así, para alguna subsucesión se obtiene $\lim\limits_{k\to+\infty} \xi_x(-t_n) \in K \cap A^*$, lo cual también es un absurdo. Para concluir, se estudia el caso $r > \delta$, es decir $\overline{\mathcal{O}_\delta\,(A^*)} \cap A = \emptyset$. A partir de la definición del atractor local existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(A)) = A$ y $\mathcal{O}_{2\epsilon}(A) \cap \overline{\mathcal{O}_\delta\,(A^*)} = \emptyset$. En estas circunstancias, existe una subsucesión $t_k \to +\infty$ para el cual se cumple $\xi_x(-t_k) \in K \setminus \mathcal{O}_\epsilon(A)$, para todo k. Por lo tanto, $d_H\big(T(t)K, A\big) \not\to 0$ cuando $t \to +\infty$ y así A no atrae a K. Esto contradice el corolario 2.2.6. $\square$

A continuación se presentan las propiedades dinámicas más útiles que son inducidas por un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$.

Proposición 2.2.8. *Sea* (A, A^*) *un par atractor-repulsor para* $T(\cdot)$*.*

(a) Si $\xi_x\colon \mathbb{R} \to X$ *es una solución global acotada que pasa por* $x \notin A \cup A^*$*, entonces* $\xi_x(t) \xrightarrow{t\to+\infty} A$ *y* $\xi_x(t) \xrightarrow{t\to-\infty} A^*$*.*

(b) Si $x \in X \setminus \mathcal{A}$ *con* $\mathcal{A}$ *el atractor global, entonces* $T(t)\,x \xrightarrow{t\to+\infty} A \cup A^*$*.*

Demostración. En (a), la proposición 1.3.31 garantiza que $\xi_x(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$, luego por el teorema 1.4.4 se obtiene $\alpha(\xi_x) \subset A^*$ y $\omega(x) \subset A$ y se concluye la prueba de (a).

En (b), el elemento $x \in X \setminus \mathcal{A}$ induce la órbita positiva $\gamma^+(x)$, cuya clausura $\overline{\gamma^+(x)}$ podría intersecar el atractor local A y en este caso el conjunto límite $\omega(x) \subset A$. Si por el contrario $\overline{\gamma^+(x)} \cap A = \emptyset$, aparece una constante $\delta > 0$ de modo que la vecindad $\mathcal{O}_\delta(A)$ no interseca la órbita positiva, es decir $\mathcal{O}_\delta(A) \cap \gamma^+(x) = \emptyset$. Esto permite inferir que

$$\omega(x) \subset A^*.$$

Si, por el contrario, no se verifica esta inclusión entonces existiría una constante positiva $\varepsilon > 0$ y una sucesión $t_n \to +\infty$ (creciente) de modo que $d\big(T(t_n)x, A^*\big) \geq \varepsilon$. En este contexto, se dan las condiciones para usar la demostración del lema 2.2.5. Específicamente, un procedimiento similar al presentado en tal prueba demuestra que las funciones continuas $\xi_n : \mathbb{R} \to X$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por

$$\xi_n(t) := \begin{cases} x, & t \in (-\infty, -t_n); \\ T(t+t_n)x, & t \in [-t_n, +\infty). \end{cases}$$

generan una solución global $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ para la cual se cumple $d\big(\xi(0), A^*\big) \geq \varepsilon$. Por otro lado, la suposición $\mathcal{O}_\delta(A) \cap \gamma^+(x) = \emptyset$ muestra que $d\big(\xi(t), A\big) \geq \delta$, es decir $\omega\big(\xi(0)\big) \cap A = \emptyset$ y $\xi(0) \in A^*$. Esta contradicción con $d\big(\xi(0), A^*\big) \geq \varepsilon$, muestra $\omega(x) \subset A^*$ y se obtiene (b). $\square$

El siguiente resultado, que aparece en [1], muestra la equivalencia de las definiciones presentadas en los libros [14] y [36]. Para el caso extremo $A = \emptyset$, la equivalencia es verdadera. El ítem (1) de la proposición, aparece en (1.29): A es un atractor local débil (en $\mathcal{A}$).

Proposición 2.2.9. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor global para $T(\cdot)$. Si $A \subset \mathcal{A}$ es invariante, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Existe $\epsilon > 0$ tal que $\omega\big(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap \mathcal{A}\big) = A$.

(2) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big) = A$.

Demostración. Si se acepta (1), los compactos A y A^* son disjuntos. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $d(A; A^*) > 2\varepsilon$. Para $0 < \delta < \min\{\varepsilon, \epsilon\}$, existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A)$ (lema 2.2.5) Además, cuando $s \geq 0$

$$\bigcup_{t\geq s} T(t)\big(\mathcal{O}_{\delta'}(A)\big) \subset \bigcup_{t\geq 0} T(t)\big(\mathcal{O}_{\delta'}(A)\big) \subset \mathcal{O}_\delta(A),$$

entonces

$$\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \overline{\mathcal{O}_\delta(A)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(A) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(A).$$

Por otro lado, el atractor global $\mathcal{A}$ atrae al conjunto acotado $\mathcal{O}_{\delta'}(A)$. Es decir $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{A}$ (corolario 1.2.7 con $F = \mathcal{A}$), luego $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap \mathcal{A}$. Con esto, se observa que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$ es compacto y $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \cap A^* = \emptyset$. Por el corolario 2.2.6, el conjunto A atrae al compacto $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$, es decir

$$\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset A.$$

De la invarianza de A se obtiene que $A = \omega(A) \subset \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$. Por tanto, $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) = A$ y se cumple (2).

Recíprocamente, si se acepta (2) basta observar que

$$A \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A).$$

A partir de las propiedades del conjunto límite se obtiene que

$$\omega(A) \subset \omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A) \cap \mathcal{A}) \subset \omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A)) = A$$

Por lo tanto, se cumple (1), pues A es invariante. $\square$

El siguiente concepto se usará para presentar la relación natural de un atractor local con su conjunto inestable (teorema 2.2.11).

2.2.10. Un cerrado invariante $E \subset X$ se dirá que es un **invariante aislado**, cuando es posible dar una constante positiva $\epsilon > 0$ de modo que el conjunto inicial E es el invariante maximal en $\mathcal{O}_\epsilon(E)$. En otras palabras, para cualquier conjunto invariante B que está contenido en la vecindad $\mathcal{O}_\epsilon(E)$, se obtiene que E incluye al conjunto B. Por ejemplo, cada atractor local $A \subset \mathcal{A}$ es un invariante aislado. Para ver esto, es útil notar que el atractor local además de ser invariante, admite una constante $\varepsilon > 0$ con la cual se cumple $\omega(\mathcal{O}_\varepsilon(A)) = A$. En consecuencia, cada conjunto invariante $B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ satisface $B = \omega(B) \subset \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big)$, es decir $B \subset A$. En otras palabras, A es el invariante maximal en $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ y se concluye:

$$\text{cada atractor local } A \subset \mathcal{A} \text{ es un invariante aislado.} \tag{2.15}$$

Es más, si se elige $y \in W^u(A)$ (aquí A es el atractor local) existe la solución global $\xi_y : \mathbb{R} \to X$ que satisface $\alpha(\xi_y) \subset A$. En estas condiciones, la parte (b) del teorema 1.4.4 garantiza que la órbita $\xi(\mathbb{R})$ es parte de A, especialmente $y = \xi_y(0) \in A$. En conclusión, $W^u(A) \subset A$. Recíprocamente, si $z \in A$ (A es el atractor local, que resulta ser compacto e invariante) por la proposición 1.3.29 existe solución global $\xi_z : \mathbb{R} \to A \subset X$, con $z = \xi_z(0)$ tal que $\alpha(\xi_z) \subset A$ entonces $z \in W^u(A)$ y se obtiene $A \subset W^u(A)$. Por lo tanto,

$$\text{cada atractor local } A \subset \mathcal{A} \text{ satisface } A = W^u(A) \tag{2.16}$$

Por otro lado, es necesario señalar, que los atractores locales son objetos importantes en el estudio de la dinámica de los semigrupos que admiten un atractor global. En este contexto, la propiedad (2.15) permite entender, la utilidad de la caracterización de los conjuntos invariantes aislados que resultan ser atractores locales (parte (b) del siguiente teorema). Note que tales conjuntos tienen una estrecha relación con la propiedad dada en (2.16).

Teorema 2.2.11. *Sea $\mathcal{A}$ un atractor global para $T(\cdot)$.*

(a) Si $A \subset \mathcal{A}$ es invariante entonces son equivalentes:

$$\Big(\exists\, \epsilon > 0 :\ \omega\big(\mathcal{O}_\epsilon(A) \cap \mathcal{A}\big) = A\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists\, \varepsilon > 0 :\ \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big) = A\Big).$$

(b) Si $A \subset \mathcal{A}$ es invariante aislado entonces son equivalentes:

$$\Big(\exists\, \varepsilon > 0 :\ \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big) = A\Big) \Leftrightarrow W^u(A) = A.$$

Demostración. El ítem (a) está demostrado en la proposición 2.2.9. Se incluye para facilitar las comparaciones.

En (b), sea $A \subset \mathcal{A}$ un invariante aislado, es decir

$$\exists\, \delta_0 > 0 : A \text{ es el invariante maximal en } \mathcal{O}_{\delta_0}(A). \tag{2.17}$$

Si $\exists\, \varepsilon > 0 :\ \omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big) = A$, la propiedad dada en (2.16) muestra que el conjunto inestable $W^u(A)$ es el propio A. Recíprocamente, se considera un invariante aislado $A \subset \mathcal{A}$ que satisface $W^u(A) = A$. Para ver que A es un atractor local se usa (2.17) y se hace la siguiente afirmación.

Afirmación *Para todo $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que*

$$\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A).$$

Se procede por contradicción: existe un $0 < \delta < \delta_0$ tal que para todo $\delta' \in (0, \delta)$ se tiene $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \not\subset \mathcal{O}_\delta(A)$. Para $\delta' = \dfrac{\delta}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{O}_{\delta'}(A) \setminus A$ y $t_n \geq 0$ de modo que (figura 2.2.1)

$$T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(A), \quad \forall t \in [0, t_n); \quad d\big(T(t_n)x_n, A\big) = \delta \quad \text{y} \quad t_n < t_{n+1}. \tag{2.18}$$

La continuidad en la definición 1.1.4, implica que la función $\xi_n : \mathbb{R} \to X$, $n \in \mathbb{N}$ definida por

$$\xi_n(t) := \begin{cases} x_n, & t \in (-\infty, -t_n); \\ T(t + t_n)x_n, & t \in [-t_n, +\infty). \end{cases}$$

es continua.

Es más, la prueba del lema 2.2.5 garantiza que existe una subsucesión ξ_k de modo que la función límite $\xi : \mathbb{R} \to X$, dada por $\xi(t) = \lim_{k\to+\infty} \xi_k(t)$ es una solución global de $T(\cdot)$ que cumple $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(A)}, \forall t \leq 0$. Es decir, la unión $\alpha(\xi) \cup A \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(A)$ es un conjunto invariante con $\alpha(\xi) \neq \emptyset$. Por (2.17), $\alpha(\xi) \subset A$. En otras palabras, $\xi(0) \in W^u(A)$. Como $W^u(A) = A$ se obtiene que $\xi(0) \in A$. Por otro lado, (2.18) y la construcción implica que $\xi(0) = \lim_{k\to+\infty} T(t_k)x_k$ satisface $d(\xi(0), A) = \delta > 0$. Esta contradicción demuestra la afirmación.

Por la afirmación, $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$ es un conjunto invariante en $\mathcal{O}_{\delta_0}(A)$. Por (2.17) se obtiene que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset A$. Pero A es un conjunto invariante contenido en $\mathcal{O}_{\delta'}(A)$, por eso $A = \omega(A) \subset \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$. Por lo tanto $A = \omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A))$ y se concluye que A es un atractor local. □

2.2.12. Considere (A, A^*) como un par atractor-repulsor para el semigrupo $T(\cdot)$, en concordancia con la definición 2.2.1. Por (2.15), el atractor local A es un invariante aislado. Además, el teorema 1.4.4 garantiza que ambos conjuntos A y A^* son compactos, invariantes y disjuntos. En este contexto, la proposición 2.2.8 permite mostrar que A^* también es un invariante aislado. Es decir, existe una constante $\delta > 0$ para la cual las vecindades son disjuntas y aíslan los invariantes; simbólicamente se escribe diciendo

$$\begin{gathered}\mathcal{O}_\delta(A) \cap \mathcal{O}_\delta(A^*) = \emptyset,\\ A \text{ es invariante maximal en } \mathcal{O}_\delta(A),\\ A^* \text{ es invariante maximal en } \mathcal{O}_\delta(A^*).\end{gathered}$$

Como consecuencia de lo dicho, cada solución global $\xi_x : \mathbb{R} \to X$ que pasa por un elemento $x \notin (A \cup A^*)$ no solo satisface

$$\lim_{t\to-\infty} d(\xi_x(t), A^*) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} d(\xi_x(t), A) = 0$$

(proposición 2.2.8), sino también

$$\omega(x) \cap A^* = \alpha(\xi_x) \cap A = \emptyset$$

(teorema 1.4.4).

Es más, con las definiciones y propiedades adecuadas es fácil ver que **no** existe una solución global $\xi : \mathbb{R} \to X$ para la cual se cumplen las siguientes propiedades

$$\lim_{t\to+\infty} d(\xi(t), A^*) = 0 \quad \textbf{y} \quad \lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), A) = 0.$$

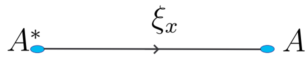

Figura 2.3: No existe otra 'conexión': solo ξ_x, de A^* en A (con $x \notin A \cup A^*$).

Definición 2.2.13. *Se dice que la familia* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *es* ***invariante aislada*** *si existe una constante positiva* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(E_i) \cap \mathcal{O}_\delta(E_j) = \emptyset$ *cuando* $1 \leq i < j \leq n$, *y cada cerrado* $E_i \subset \mathcal{A}$ *es el invariante maximal (respecto al semigrupo) en* $\mathcal{O}_\delta(E_j)$.

Para concluir, se caracteriza la descomposición de Morse de un atractor global, empleando conjuntos invariantes aislados. Se demuestra la equivalencia entre la definición presentada en [36] con la definición que se usa en [1]. Tal equivalencia es indispensable para relacionar coherentemente los resultados el primer capítulo con los siguientes. Cabe mencionar que este tema está vinculado con los resultados de [14] y [10], como el teorema fundamental de los sistemas dinámicos (vea también [26]).

Proposición 2.2.14. *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo que admite un atractor global* $\mathcal{A}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) El atractor global admite una descomposición de Morse. Es decir, existe una colección ordenada $\{\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n\}$ *asociada a una familia de atractores locales (débiles en* $\mathcal{A}$*)* $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathcal{A}$ *por medio de la relación* $\tilde{E}_j = A_j \cap A^*_{j-1}$, *para todo* $1 \leq j \leq n$.

(2) El atractor global admite $\{E_1, \ldots, E_n\}$, *una familia ordenada de cerrados que es invariante aislada, para la cual cada solución global* $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ *induce* i, j *con* $i \geq j$ *tal que*

$$E_i \xleftarrow{t\to-\infty} \xi(t) \xrightarrow{t\to+\infty} E_j.$$

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$: Se observa inicialmente que cada $\tilde{E}_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ es cerrado, es más se cumple la definición 2.2.13:

(a1) La familia ordenada $\{\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n\}$ es invariante aislada.

La proposición 1.4.11 no solo induce una constante positiva $\epsilon > 0$ que satisface $\mathcal{O}_\epsilon(\tilde{E}_i) \cap \mathcal{O}_\epsilon(\tilde{E}_j) = \emptyset$ cuando $1 \leq i < j \leq n$, sino también permite afirmar que cada $\tilde{E}_i$ es el repulsor de A_{i-1} en A_i; por **2.2.12** se tiene que cada $\tilde{E}_i$ es invariante aislado, es decir admite una constante $\delta_i > 0$ de modo que $\tilde{E}_i$ es invariante maximal en $\mathcal{O}_{\delta_i}(\tilde{E}_i)$. Si se considera la constante $\delta = \min\{\epsilon, \delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$, se cumple que $\tilde{E}_i$ es invariante maximal en $\mathcal{O}_\delta(\tilde{E}_i)$ y $\mathcal{O}_\delta(\tilde{E}_i) \cap \mathcal{O}_\delta(\tilde{E}_j) = \emptyset$ cuando $1 \leq i < j \leq n$. En otras palabras, se cumple (a1). Por otro lado, se afirma que:

(a2) Cada solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ induce subíndices i, j con $i \geq j$ de modo que $\alpha(\xi) \subset \tilde{E}_i$ y $\omega(\xi(0)) \subset \tilde{E}_j$.

Para $x = \xi(0) \in \mathcal{A}$, se elige el subíndice i como el menor elemento del conjunto $\{1, \dots, n\}$ para el cual se tiene $x \in A_i$ pero $x \notin A_{i-1}$. Así, si $x \in A^*_{i-1}$, la invarianza del conjunto cerrado $\tilde{E}_i$ garantiza que $\alpha(\xi) \cup \omega(x) \subset \tilde{E}_i$ y se concluye. Si por el contrario $x \notin A^*_{i-1}$ es decir $x \notin (A_{i-1} \cup A^*_{i-1})$, la proposición 2.2.8 muestra que $\alpha(\xi) \subset A^*_{i-1}$ y $\omega(x) \subset A_{i-1}$. La elección de i implica que $\alpha(\xi) \subset \tilde{E}_i = A_i \cap A^*_{i-1}$. De $\omega(x) \subset A_{i-1}$, pueden ocurrir dos situaciones complementarias:

$$o \quad \omega(x) \cap A^*_{i-2} \neq \emptyset, \text{ o bien } \omega(x) \cap A^*_{i-2} = \emptyset.$$

Si $\omega(x) \cap A^*_{i-2} \neq \emptyset$, el teorema 1.4.4 muestra que $\omega(x) \subset A^*_{i-2}$ y se concluye que el conjunto límite $\omega(x) \subset A_{i-1} \cap A^*_{i-2} = \tilde{E}_{i-1}$. Si por el contrario $\omega(x)$ es disjunto de A^*_{i-2} se desprende sin dificultad que $\omega(x) \cap \tilde{E}_{i-1} = \emptyset$ (pues $\tilde{E}_{i-1} \subset A^*_{i-2}$). Es más, la suposición $\omega(x) \cap A^*_{i-2} = \emptyset$ implica[7] que $\omega(x) \cap A_{i-2} \neq \emptyset$ y por **1.4.6** se obtiene $\omega(x) \subset A_{i-2}$. En resumen

$$\omega(x) \subset A_{i-1} \Rightarrow \begin{cases} \omega(x) \subset \tilde{E}_{i-1}, & \text{o} \\ \omega(x) \subset A_{i-2}. \end{cases}$$

[7]Note que $\omega(x) \cap A_{i-2} = \emptyset$ no solo es equivalente a decir que $x \in A^*_{i-2}$, sino también muestra que el conjunto no vacío $\omega(x) \subset A^*_{i-2}$, una contradicción,

Cuando $\omega(x) \subset A_{i-2}$, el razonamiento anterior muestra que o $\omega(x) \subset \tilde{E}_{i-2}$ o bien $\omega(x) \subset A_{i-3}$. Finalmente, cuando $\omega(x) \subset A_2$ se obtiene $\omega(x) \subset \tilde{E}_2$ ó $\omega(x) \subset A_1 = \tilde{E}_1$. Es decir, $\omega(x) \subset \tilde{E}_j$, para algún $1 \leq j < i$. Esto demuestra (a2) y por lo tanto se cumple (2) en la proposición.

($2 \Rightarrow 1$): La familia ordenada de cerrados $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es invariante aislada, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}_\delta(E_i) \cap \mathcal{O}_\delta(E_j) = \emptyset$ cuando $1 \leq i < j \leq n$, y además cada cerrado $E_i \subset \mathcal{A}$ es invariante maximal en $\mathcal{O}_\delta(E_i)$. La compacidad de $\mathcal{A}$ garantiza que cada E_i es compacto. Con todo esto, (2) induce las condiciones del lema 1.4.12. Por lo tanto, la familia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es una descomposición de Morse (teorema 1.4.14) y se obtiene (1). Esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 2.2.15. *La descomposición de Morse $\mathcal{S} = \{E_1, E_2, E_3\}$ del atractor global $\mathcal{A} = D_{\sqrt{2}}$ del ejemplo 2.2.2 se obtiene utilizando la relación $E_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ para todo $1 \leq j \leq 3$. Es decir,*

$$E_1 = A_1 \cap A^*_0 = \{(0,0)\} \cap D_{\sqrt{2}} = \{(0,0)\}$$

$$E_2 = A_2 \cap A^*_1 = (\{(0,0)\} \cup \partial D_{\sqrt{2}}) \cap (D_{\sqrt{2}} \backslash int(D_1)) = \partial D_{\sqrt{2}}$$

$$E_3 = A_3 \cap A^*_2 = D_{\sqrt{2}} \cap \partial D_1 = \partial D_1$$

Además, se observa que la familia ordenada $\mathcal{S} = \{E_1, E_2, E_3\}$ de cerrados es invariante aislada. Del retrato de fase dado en la figura 1.2 se desprende que para cada solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ se cumple

$$E_3 \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_i \ \textit{ cuando } \ 1 \leq i \leq 2.$$

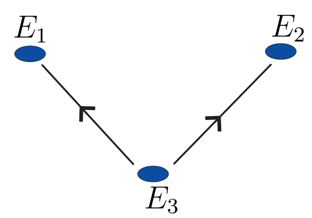

Figura 2.4: Ejemplo 2.2.15

2.3 Conjunto inestable asociado a un semigrupo dinámicamente gradiente.

La siguiente definición toma en cuenta la caracterización de la descomposición de Morse de un atractor global, por medio de una familia invariante aislada. Por ejemplo, para los semigrupos gradientes de la proposición 2.1.5, su conjunto de equilibrios $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ define una descomposición de Morse que resulta ser una familia invariante aislada. Además, cuando se admite su existencia, el atractor global se caracteriza como $W^u(\mathcal{E})$ (teorema 2.1.14).

Definición 2.3.1. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo y sea $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Una* ***estructura homoclínica*** *en $\mathcal{S}$ es un subconjunto $\{E_{k_1}, \ldots, E_{k_p}\}$ de $\mathcal{S}$ ($p \leq n$), asociado al conjunto de soluciones globales $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ para las cuales se cumple*

$$E_{k_j} \xleftarrow{t \to -\infty} \xi_j(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_{k_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq p$$

donde $E_{k_{p+1}} = E_{k_1}$ y cada ξ_j admite un t_j con $\xi_j(t_j) \notin (E_{k_j} \cup E_{k_{j+1}})$.

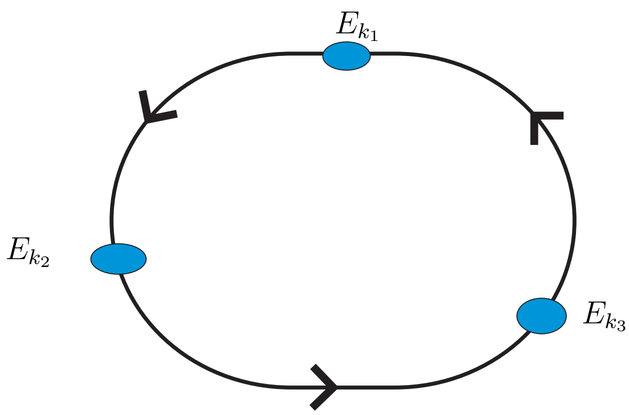

Figura 2.5: Estructura homoclínica (p=3).

Observación 2.3.2. *Del ejemplo 2.2.15 se infiere que el sistema de ecuaciones diferenciales no tiene estructura homoclínica en la familia invariante aislada $\mathcal{S}$ (figura 2.4).*

Se presenta el concepto de semigrupo dinámicamente gradiente, de acuerdo con la presentación del libro dado en [10]. Este concepto aparece inicialmente en [1] con el nombre de *tipo-gradiente* y en [11] se extiende al caso de los proceso de evolución. Estos semigrupos son los principales objetos de estudio de la sección, con los que se presentarán los principales resultados de la tesis.

Definición 2.3.3 (Semigrupo tipo–gradiente)**.** *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Se dice que $T(\cdot)$ es* ***dinámicamente gradiente*** *respecto a $\mathcal{S}$ (o $\mathcal{S}-$dinámicamente gradiente, o tipo-gradiente respecto a $\mathcal{S}$, o $\mathcal{S}-$gradiente) si*

- ◇ *Para cualquier solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ existe $1 \leq i, j \leq n$ tal que*

$$E_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_j,$$

- ◇ *No existe una estructura homoclínica asociada a $\mathcal{S}$.*

Para ilustrar el concepto se presentan dos ejemplos, el primero algo más sencillo.

Ejemplo 2.3.4. *Sea (A, A^*) un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$. En el parágrafo* **2.2.12** *se presentan algunas propiedades de $T(\cdot)$ relacionadas con la familia $\mathcal{S} = \{A, A^*\}$ (formada por dos conjuntos invariantes aislados) con las cuales se observa que el semigrupo es $\mathcal{S}-$dinámicamente gradiente.*

Ejemplo 2.3.5. *Se considera el semigrupo $T(\cdot)$ generado por las ecuaciones diferenciales dado en el ejemplo 1.3.18 el cual admite un atractor global $\mathcal{A} = D_{\sqrt{2}}$. De los resultados obtenidos en el ejemplo 2.2.15 y la observación 2.3.2, se infiere que el semigrupo $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente con respecto a la familia invariante $\mathcal{S} = \{E_1, E_2, E_3\}$.*

Se describe la construcción de la descomposición de Morse para el atractor global de un semigrupo dinámicamente gradiente. La estrategia consiste en obtener inductivamente un conjunto cada vez más grande de atractores locales; para tal fin el teorema 2.2.11, la proposición 2.2.14 y el siguiente lema desempeñan un rol fundamental.

Lema 2.3.6. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Si $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente respecto a $\mathcal{S}$, entonces existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que $W^u(E_k) = E_k$ es un atractor local para $T(\cdot)$.*

Demostración. Se procede por el absurdo, es decir se acepta que:

$$W^u(E_i) \neq E_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Cada cerrado E_i admite una solución global $\xi_i : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ de modo que $\xi_i(t) \xrightarrow{t \to -\infty} E_i$ y $\xi_i(0) \notin E_i$.

Por otro lado, de la primera condición en la definición 2.3.3, la solución global $\xi_i(t)$ converge (cuando $t \to +\infty$) para algún elemento de $\mathcal{S}$, en otras palabras con las soluciones globales $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se genera una estructura homoclínica. Esta contradicción con la definición de semigrupo dinámicamente gradiente demuestra que existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $E_k = W^u(E_k)$. Se concluye que tal E_k es un atractor local, a partir del teorema 2.2.11. □

En la siguiente proposición aparece, en detalle, toda la construcción de una descomposición de Morse para el atractor global de un semigrupo dinámicamente gradiente. La no existencia de estructuras homoclínicas permite encontrar los atractores locales y reordenarlos (lema 2.3.6).

Proposición 2.3.7. *Si $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente respecto a $\mathcal{S}$ (definición 2.3.3) entonces se puede reordenar $\mathcal{S}$ para que sus elementos formen una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Como $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente respecto a la familia (invariante) aislada $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, para cualquier solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ existen $1 \le l, k \le n$

$$E_l \xleftarrow{t\to-\infty} \xi(t) \xrightarrow{t\to+\infty} E_k. \tag{2.19}$$

Por la proposición 2.2.14, bastará demostrar que es posible reordenar $\mathcal{S}$ de tal manera que (2.19) ocurre para $l \ge k$.

Sea $\mathfrak{E}_1 \in \mathcal{S}$ el atractor local dado por el lema 2.3.6. Por la invarianza de los elementos de la familia aislada, se infiere que en cada $E_j \neq \mathfrak{E}_1$ los conjuntos límites $\omega(x)$ son disjuntos de $\mathfrak{E}_1$ cuando $x \in E_j$. En otras palabras, cada $E_j \neq \mathfrak{E}_1$ es parte del repulsor $\mathfrak{E}_1^*$ en $\mathcal{A}$. En este contexto, por el ejemplo 2.3.4 cualquier solución global $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ con $\phi(0) \in \mathcal{A} \setminus \{\mathfrak{E}_1 \cup \mathfrak{E}_1^*\}$ satisface

$$\lim_{t\to-\infty} d\big(\phi(t), \mathfrak{E}_1^*\big) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} d\big(\phi(t), \mathfrak{E}_1\big) = 0,$$

y se obtiene (2.19) con $1 = k < l$, pues $\mathfrak{E}_1^* \supset E_j, \forall E_j \neq \mathfrak{E}_1$.

Sea $T_1(\cdot)$ la restricción de $T(\cdot)$ en $\mathfrak{E}_1^*$. Tal $T_1(\cdot)$ es dinámicamente gradiente respecto a la familia invariante aislada $\{E_j : E_j \neq \mathfrak{E}_1\}$, formada por subconjuntos cerrados del compacto invariante $\mathfrak{E}_1^* \subset \mathcal{A}$. Existe $E_j = W^u(E_j) \neq \mathfrak{E}_1$, un atractor local para $T_1(\cdot)$ en $\mathfrak{E}_1^*$, con el que se define $\mathfrak{E}_2 = E_j$ (lema 2.3.6). Como antes, cada elemento de la familia $\{E_i : E_i \neq \mathfrak{E}_1\}$ con $E_i \neq \mathfrak{E}_2$ es parte del repulsor, es decir $E_i \subset \mathfrak{E}_2^*$. Consecuentemente, cualquier solución global $\psi : \mathbb{R} \to \mathfrak{E}_1^* \subset \mathcal{A}$ con $\psi(0) \in \mathfrak{E}_1^* \setminus \{\mathfrak{E}_2 \cup \mathfrak{E}_2^*\}$ se tiene

$$\lim_{t\to-\infty} d(\psi(t), \mathfrak{E}_2^*) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty} d(\psi(t), \mathfrak{E}_2) = 0,$$

y se obtiene (2.19) con $2 = k < l$, pues $\mathfrak{E}_2^* \supset E_j, \forall E_j \in \{E_i : E_i \neq \mathfrak{E}_1\}, E_j \neq \mathfrak{E}_2$. Análogamente, la restricción de $T_1(\cdot)$ en $\mathfrak{E}_2^*$ (denotada por $T_2(\cdot)$) es dinámicamente gradiente en $\mathfrak{E}_2^*$, respecto a la familia aislada $\{E_1, \ldots, E_n\} \setminus \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2\}$ y su atractor local será $\mathfrak{E}_3$.

Se procede hasta agotar todos los conjuntos invariantes aislados y se obtiene un reordenamiento $\{\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n\}$ tal que $\mathfrak{E}_j$ es un atractor local para la restricción de $T(\cdot)$ en $\mathfrak{E}^*_{j-1}$ (repulsor asociado a $\mathfrak{E}_{j-1}$ en $\mathfrak{E}^*_{j-2}$), donde $\mathfrak{E}^*_0 = \mathcal{A}$. Así, cada solución global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ con

$$\mathfrak{E}_l \xleftarrow{t\to-\infty} \xi(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \mathfrak{E}_k,$$

satisface $\xi(0) \in \mathfrak{E}^*_{k-1}$. Pero $\mathfrak{E}^*_{k-1}$ es invariante y solo contiene a los conjuntos $\{\mathfrak{E}_k, \ldots, \mathfrak{E}_n\}$ y en consecuencia $l > k$. Por la proposición 2.2.14 se concluye que la reordenación $\{\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n\}$ es una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$. □

Por la proposición anterior, la suposición en el semigrupo dinámicamente gradiente no crea restricciones adicionales. Cabe mencionar que se utilizan los conjuntos A_k, presentados en el lema 1.4.12.

Teorema 2.3.8. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo dinámicamente gradiente respecto a la familia invariante aislada $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Si $\mathcal{S}$ es una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$. Entonces los conjuntos $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(E_i)$, con $1 \le k \le n$ son atractores locales de $T(\cdot)$ que satisfacen las inclusiones $A_0 = \emptyset \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathcal{A}$ y $E_j = A_j \cap A^*_{j-1}$. Además,*

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A^*_j) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j. \tag{2.20}$$

Demostración. La existencia de los atractores locales y sus propiedades se siguen directamente de los lemas 1.4.12 y 1.4.13. En otras palabras, cada uno de los conjuntos $A_k = W^u\big(E_1 \cup \cdots \cup E_k\big) = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(E_j)$ es un atractor local de $T(\cdot)$.

Para concluir, bastará obtener (2.20) por doble inclusión. Si $z \in E_k = A_k \cap A^*_{k-1}$ para algún $1 \le k \le n$. Por el lema 1.4.12 y (1.37), se tiene

$$z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_n \quad \text{ y } \quad z \in A^*_{k-1} \subset A^*_{k-2} \subset \cdots \subset A^*_0,$$

luego

$$z \in \Big(\bigcap_{j=k}^{n} A_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=0}^{k-1} A^*_j\Big) \subset \Big[\bigcap_{j=k}^{n} \big(A_j \cup A^*_j\big)\Big] \cap \Big[\bigcap_{j=0}^{k-1} \big(A_j \cup A^*_j\big)\Big] = \bigcap_{j=0}^{n} \big(A_j \cup A^*_j\big),$$

y se obtiene $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} E_j \subset \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$. Recíprocamente, cuando $z \in \displaystyle\bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$, se elige $1 \leq i \leq n$ como el menor número para el cual $z \in A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots \subset A_n$; en otras palabras, $z \notin A_k$ para $k = 0, \ldots, i-1$. Por consiguiente, $z \in A_{i-1}^* \subset \cdots \subset A_0^*$, luego $z \in A_i \cap A_{i-1}^* = E_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. Con esto se obtiene que $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*) \subset \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. Por lo tanto, se cumple (2.20) y concluye la demostración. $\square$

Del teorema 2.3.8 se desprende otra caracterización del atractor global, esto es

$$\mathcal{A} = A_n = \bigcup_{i=1}^{n} W^u(E_i).$$

Ejemplo 2.3.9. *Si se considera los resultados del ejemplo 2.1.10 se tiene que*

$$\mathcal{A} = A_3 = \bigcup_{i=1}^{3} W^u(E_i).$$

donde E_i *fueron obtenidos utilizando la relación* $E_i = A_i \cap A_{i-1}^*$ *(vea el ejemplo 2.2.15), siendo los atractores locales*

$$A_0 = \emptyset, \quad A_1 = \{(0,0)\}, \quad A_2 = \{(0,0)\} \cup \partial D_{\sqrt{2}} \;\; y \;\; A_3 = D_{\sqrt{2}} = \mathcal{A}.$$

(vea el ejemplo 2.2.2)

Capítulo 3

Función de Lyapunov para una descomposición de Morse

"El modo de dar una vez en el clavo
es dar cien veces en la herradura."
Miguel De Unamuno.

Para los semigrupos, se presenta la equivalencia entre: ser dinámicamente gradiente, respecto a una familia invariante aislada, y la existencia de una función de Lyapunov, generalizada. Este resultado aparece en [1] y se inspira en [14].

3.1 Resultados preparatorios para los teoremas principales

A continuación se incluye la definición de un semigrupo gradiente con respecto a una familia invariante aislada que satisface la definición 2.2.13.

Definición 3.1.1. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Se dice que $T(\cdot)$ es un* ***semigrupo gradiente con respecto a*** *$\mathcal{S}$ si existe una función continua $V : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades.*

- ◇ *La función $[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ es decreciente, cuando $x \in X$;*
- ◇ *V es constante en E_i, para cada $1 \leq i \leq n$ y*
- ◇ $V(T(t)x) = V(x), \forall t \geq 0$ *si y sólo si* $x \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

La función V con estas propiedades es llamada ***función de Lyapunov generalizada*** *de $T(\cdot)$, con respecto a $\mathcal{S}$.*

La siguiente proposición muestra que la existencia de la función de Lyapunov generalizada de la definición anterior convierte al semigrupo en dinámicamente gradiente. De este modo se extiende los resultados de [14, 17] (proposición 2.1.5) a familias invariantes aisladas. El recíproco de esta proposición — y por tanto, la equivalencia de los conceptos — es uno de los resultados principales de la tesis.

Proposición 3.1.2. *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo gradiente con respecto a la familia invariante aislada $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Si la función continua $V : X \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones de la definición 3.1.1. Entonces se cumple lo siguiente.*

(a) Para cualquier solución global $\xi : \mathbb{R} \to X$ existe $1 \leq i, j \leq n$ tal que

$$E_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_j.$$

(b) No existe una estructura homoclínica asociada a $\mathcal{S}$.

En otras palabras, $T(\cdot)$ es $\mathcal{S}-$dinámicamente gradiente.

Demostración. En (a), se considera una solución global ξ_x (que pasa por x). La prueba del lema 2.1.4 permite mostrar que en los conjuntos límite, cada uno de sus elementos $z \in \omega(x)$ (o bien $z \in \alpha(\xi_x)$) satisface $V\big(T(t)z\big) = V(z), \forall t \geq 0$, es decir $z \in \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, luego $\omega(x) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ (o bien $\alpha(\xi_x) \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k$). Como la familia $\mathcal{S}$ es invariante aislada, los conjuntos cerrados invariantes $\omega(x)$ y $\alpha(\xi_x)$ inducen subíndices para los cuales se cumple $1 \leq i, j \leq n$ tal que $E_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi_x(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_j$. Con todo esto que el ítem (a) es verdadero.

En (b), se procede por el absurdo y por tal motivo se admite un subconjunto $\{E_{k_1}, \ldots, E_{k_p}\}$ de $\mathcal{S}$ ($p \leq n$), asociado a un conjunto de soluciones globales $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ para las cuales se cumple $E_{k_j} \xleftarrow{t \to -\infty} \xi_j(t) \xrightarrow{t \to +\infty} E_{k_{j+1}}$, cuando $1 \leq j \leq p$ con $E_{k_{p+1}} = E_{k_1}$. Como la función V es continua y decreciente en las soluciones, para todo $1 \leq j \leq p$ se tiene $V(E_{k_j}) = V(\alpha(\xi_j)) \geq V(\xi_j(0)) \geq V(\omega(\xi_j(0))) = V(E_{k_{j+1}})$, luego $V(E_{k_1}) \geq V(E_{k_2}) \geq \cdots \geq V(E_{k_{p+1}})$. Desde que $E_{k_{p+1}} = E_{k_1}$ se obtiene que los valores son iguales $V(E_{k_1}) = V(E_{k_2}) = \cdots = V(E_{k_{p+1}}) = C$, además $V(\omega(\xi_j(0))) = V(\alpha(\xi_j)) = V(\xi_j(0)) = V(\xi_j(\mathbb{R})) = C$, por la definición 3.1.1 $\xi_j(0) \in \bigcup_{j=1}^{p} E_{k_j}$. Como $\omega(\xi_j(0)) \subset E_{k_{j+1}}$ y $\alpha(\xi_j) \subset E_{k_j}$, por la invarianza de cada E_j se tiene que $\xi_j(0) \in E_{k_j} \cap E_{k_{j+1}} \neq \emptyset$. Esta contradicción con la definición 2.2.13 demuestra (b). Por lo tanto, el semigrupo $T(\cdot)$ satisface la definición 2.3.3 y se concluye. $\square$

3.1.3. Para el caso especial en que la familia $\mathcal{S}$ es igual al conjunto $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, formado por los equilibrios del semigrupo el corolario 1.3.12 nos garantiza que cada $\{e_i\} \subset \mathcal{A}$ y en consecuencia, la definición anterior coincide con la teoría presentada en el capítulo 2, conforme a la definición 2.1.1. En este contexto, cabe señalar que el siguiente lema presenta un ejemplo ilustrativo y útil de la definición 3.1.1, siempre que se considere la familia aislada dada por el atractor global: $\mathcal{S} = \{\mathcal{A}\}$.

Lema 3.1.4. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si la función $h\colon X \to [0, +\infty)$ viene dada por la regla*

$$h(z) = \sup_{t \geq 0} d\big(T(t)z, \mathcal{A}\big), \quad z \in X \tag{3.1}$$

entonces

(*a*) *h es constante en $\mathcal{A}$, es decir $h^{-1}(0) = \mathcal{A}$.*

(*b*) *h es continua en X.*

(*c*) *h es decreciente en las soluciones del semigrupo: $t \mapsto h\big(T(t)z\big)$ es decreciente, para cada $z \in X$.*

Además,

$$\Big(h(T(t)x) = h(x), \forall t \geq 0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{A}. \tag{3.2}$$

Demostración. En (a), se observa inicialmente que la inclusión $\mathcal{A} \subset h^{-1}(0)$ se satisface trivialmente de (3.1). Recíprocamente, si $z \in h^{-1}(0)$, se cumple que $0 = h(z) = \sup_{t \geq 0} d\big(T(t)z, \mathcal{A}\big)$, luego $T(t)z \in \mathcal{A}, \forall t \geq 0$, en particular para $t = 0$ se obtiene que $z \in \mathcal{A}$ y se concluye que $h^{-1}(0)$ es parte de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, se cumple (a).

En (b), se prueba inicialmente la continuidad de h en cada elemento del atractor global. Para tal fin, se considera $\varepsilon > 0$. Desde que $\mathcal{A}$ satisface las condiciones del lema 2.2.5, por cada $\delta \in (0, \varepsilon)$ existe un $\delta' > 0$ con el cuál la órbita positiva $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{A}))$ es parte de $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$, en otras palabras

$$z \in \mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{A}) \implies \Big(d\big(T(t)z, \mathcal{A}\big) < \delta, \quad \forall t \geq 0\Big).$$

Con esto y (3.1) se obtiene que cada elemento $z \in \mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{A})$ satisface $h(z) \leq \delta < \varepsilon$ (i.e $z \in h^{-1}\big([0, \varepsilon)\big) = h^{-1}\big((-\varepsilon, \varepsilon) \cap [0, +\infty)\big)$). Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ de modo que $\mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{A}) \subset h^{-1}\big([0, \varepsilon)\big)$. Es decir,

$$h \text{ es continua en cada elemento de } \mathcal{A}.$$

Para obtener la continuidad de h en cada $z_0 \in X \backslash \mathcal{A}$, se usa ($a$) y se elige algún $0 < \mu < h(z_0)$. Por la continuidad de $X \ni x \mapsto d(x, \mathcal{A}) \in [0, \infty)$, para $\epsilon = \frac{1}{2} d(z_0, \mathcal{A})$ existe $0 < \delta < \frac{1}{2} d(z_0, \mathcal{A})$ de modo que $|d(z, \mathcal{A}) - d(z_0, \mathcal{A})| < \epsilon$ siempre que $d(z, z_0) < \delta$; consecuentemente, cuando se considera $0 < \mu < \min\{h(z_0), \delta\}$, la condición $d(z, z_0) < \delta$ implica $\mu < d(z, \mathcal{A}) \leq h(z)$. Por otro lado, el atractor global atrae al acotado $\mathcal{O}_\delta(z_0)$ y por (1.14) existe una constante $\tau > 0$ (independiente de $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$) tal que la órbita positiva satisface

$$\gamma^+\big(T(t)\mathcal{O}_\delta(z_0)\big) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A}) \quad \text{siempre que} \quad t \geq \tau.$$

En este contexto, existe $s_z \in [0, \tau]$ tal que $d(T(s_z)z, \mathcal{A}) = h(z)$. Por compacidad, se puede suponer que existe $s_0 = \lim\limits_{z \to z_0} s_z \in [0, \tau]$. De este último y de la continuidad del semigrupo se tiene que

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = \lim_{z \to z_0} d(T(s_z)z, \mathcal{A}) = d(T(s_0)z_0, \mathcal{A}) \leq h(z_0). \tag{3.3}$$

Por otro lado, existe $t' \in [0, \tau]$ tal que $h(z_0) = d(T(t')z_0, \mathcal{A})$. Desde que $d(T(t')z, \mathcal{A}) \leq h(z), \forall z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$, la continuidad de $T(t')$ implica que

$$h(z_0) = \lim_{z \to z_0} d(T(t')z, \mathcal{A}) \leq \lim_{z \to z_0} h(z). \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4) se obtiene la continuidad de h en cada $z_0 \in X \setminus \mathcal{A}$. Por lo tanto, h es continua en X y se cumple (b).

En (c), se considera $z \in X$ y $t_1 > 0$. Por (3.1),

$$\begin{aligned} h(T(t_1)z) &= \sup_{t \geq 0} d(T(t)T(t_1)z, \mathcal{A}) = \sup_{t \geq 0} d(T(t + t_1)z, \mathcal{A}) \\ &= \sup_{t \geq t_1} d(T(t)z, \mathcal{A}) \leq \sup_{t \geq 0} d(T(t)z, \mathcal{A}) = h(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple (c).

Para demostrar (3.2), se considera $z \in \mathcal{A}$. Por la invarianza de $\mathcal{A} = h^{-1}(0)$ se obtiene que $h(T(t)z) = h(z) = 0$ para todo $t \geq 0$. Recíprocamente, si $h(T(t)x) = h(x), \forall t \geq 0$, basta observar que el atractor global satisface

$$\lim_{t \to \infty} d(T(t)x, \mathcal{A}) = 0. \tag{3.5}$$

En otras palabras, por cada $\varepsilon > 0$, existe $\tau_{(x,\varepsilon)} > 0$ de modo que $T(t)x \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$, para todo $t > \tau_{(x,\varepsilon)}$. Así, $h(x) = h\big(T(t)x\big) = \sup_{0 \leq r \leq \tau_{(x,\varepsilon)}} d(T(r)T(t)x, \mathcal{A})$ y existe $r_0 \in [0, \tau_{(x,\varepsilon)}]$ de modo que $h(x) = h\big(T(t)x\big) = d(T(r_0 + t)x, \mathcal{A})$. Luego, por (3.5) se obtiene

$$h(x) = \lim_{t \to +\infty} h(T(t)x) = \lim_{t \to +\infty} d(T(t + r_0)x, \mathcal{A}) = 0.$$

Por (a), $x \in \mathcal{A}$. Y esto concluye que se cumple (3.2). $\square$

El siguiente es uno de los primeros lemas que permitirán construir una función de Lyapunov, cuando un determinado semigrupo satisface algunas propiedades dinámicas que lo convierte en un semigrupo tipo-gradiente. De este modo se cumple uno de los objetivos de la tesis.

Lema 3.1.5. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$, con $A \neq \emptyset$ entonces la función $L : X \to [0, 1]$,*

$$L(z) = \frac{d(z, A)}{d(z, A) + d(z, A^*)}$$

esta bien definida y es uniformemente continua en X. Además

$$L^{-1}(0) = A \quad \text{y} \quad L^{-1}(1) = A^*$$

(L es la función canónica de Urysohn, respecto a A y A^*).

Demostración. A partir de (1.2) se obtiene que cuando se consideran los compactos disjuntos A y A^*, y se elige un elemento $z \in X$, siempre se cumple las siguientes desigualdades $0 < d(A, A^*) \leq d(z, A) + d(z, A^*)$ y también $0 \leq \dfrac{d(z, A)}{d(z, A) + d(z, A^*)} \leq 1$. De este modo, la función L queda bien definida y la imagen $L(X)$ es parte del intervalo $[0, 1]$.

Para probar la continuidad uniforme de L en X, se usan las propiedades presentadas en **1.1.2** con lo que se obtiene no solo la continuidad uniforme de las funciones $d(\cdot, A)$ y $d(\cdot, A^*)$ sino también la desigualdad (1.1).

En este contexto, si el número $\varepsilon > 0$, se define la constante positiva $\delta = \varepsilon d(A, A^*) > 0$ de modo que cuando $d(z, w) < \delta$ entonces

$$L(z) - L(w) = \frac{d(z,A)d(w,A^*) - d(w,A)d(z,A^*)}{[d(z,A) + d(z,A^*)][d(w,A) + d(w,A^*)]}$$

$$= \frac{[d(z,A) - d(w,A)]d(w,A^*) + d(w,A)[d(w,A^*) - d(z,A^*)]}{[d(z,A) + d(z,A^*)][d(w,A) + d(w,A^*)]}$$

$$\leq \frac{d(z,w)\big[d(w,A^*) + d(w,A)\big]}{[d(z,A) + d(z,A^*)][d(w,A) + d(w,A^*)]}$$

$$= \frac{d(z,w)}{d(z,A) + d(z,A^*)} \leq \frac{d(z,w)}{d(A,A^*)} < \varepsilon.$$

Por simetría, se obtiene $L(w) - L(z) \leq \dfrac{d(w,z)}{d(A,A^*)} < \varepsilon$. Por lo tanto, L es uniformemente continua en X.

Para concluir, basta observar las siguientes equivalencias.

$$z \in L^{-1}(0) \Leftrightarrow L(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(z,A)}{d(z,A) + d(z,A^*)} = 0 \Leftrightarrow d(z,A) = 0 \Leftrightarrow z \in A, \text{ y}$$

$$z \in L^{-1}(1) \Leftrightarrow L(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{d(z,A)}{d(z,A) + d(z,A^*)} = 1 \Leftrightarrow d(z,A^*) = 0 \Leftrightarrow z \in A^*.$$

Es decir, $L^{-1}(0) = A$ y $L^{-1}(1) = A^*$. □

Se siguen construyendo funciones continuas que se relacionen adecuadamente con las propiedades del semigrupo. El objetivo final es construir una función de Lyapunov (generalizada) para el semigrupo dinámicamente gradiente para lo cual se usarán las propiedades presentadas en el segundo capítulo.

Lema 3.1.6. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$, con $A \neq \emptyset$, entonces la función del lema 3.1.5 induce la siguiente regla*

$$K(z) = \sup_{t \geq 0} L\big(T(t)z\big).$$

Con esta igualdad se obtiene una función $K : X \to [0,1]$ que está bien definida y es continua en X

Demostración. La propiedad inicial: $K(z) \in [0,1], \forall z \in X$ se obtiene directamente, pues el conjunto $L(X)$ admite al número uno como cota superior. Por otro lado, como no solo se verifican todas las desigualdades $L(z) \leq K(z) \leq 1, \forall z \in X$, sino también que $L(z_0) = 1, \forall z_0 \in A^*$ entonces se obtiene

$$\begin{aligned} |K(z) - K(z_0)| &= |K(z) - 1| = 1 - K(z) \leq 1 - L(z) \\ &< |1 - L(z)| = |L(z) - L(z_0)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la continuidad de L implica que $\lim_{z \to z_0} K(z) = K(z_0), \forall z_0 \in A^*$ y se concluye que

$$K \text{ es continua en } A^*. \tag{3.6}$$

Por otro lado, el atractor local A admite una constante positiva $0 < \varepsilon < d(A, A^*)$ con $\omega\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big) = A$, y así $L\big(\mathcal{O}_\varepsilon(A)\big)$ es parte del intevalo $[0,1)$ y la constante $r = \sup_{x \in \mathcal{O}_\varepsilon(A)} L(x) \leq 1$. En este contexto, el abierto $(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) \cap [0,1]$ de $[0,1]$ induce una constante positiva $0 < \delta < \varepsilon$ para la cual se verifica $L\big(\mathcal{O}_\delta(A)\big) \subset \Big[0, \frac{r}{2}\Big)$. Además, el lema 2.2.5 garantiza la existencia de una constante $0 < \delta' < \delta$ de modo que la δ'−vecindad $\mathcal{O}_{\delta'}(A)$ satisface $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset \mathcal{O}_\delta(A)$. En otras palabras, la condición $z \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ no solo implica $T(t)z \in \mathcal{O}_\delta(A), \forall t \geq 0$, sino también $0 \leq L(T(t)z) < \frac{r}{2}, \forall t \geq 0$ y $0 \leq \sup_{t \geq 0} L(T(t)z) \leq \dfrac{r}{2} < r$. Es decir, $K(\mathcal{O}_{\delta'}(A)) \subset [0, r) = (-r, r) \cap [0,1]$. Por lo tanto,

$$K \text{ es continua en } A. \tag{3.7}$$

Para continuar se presenta la siguiente afirmación, a partir de la cual se obtiene la demostración.

Afirmación. *La función K es continua en cada $z_0 \in X \backslash (A \cup A^*)$.*

$\underline{z_0 \notin \mathcal{A}}$: Por la parte (b) en la proposición 2.2.8, se presentan dos casos complementarios:

$$\xi_{z_0}(t) \xrightarrow{t \to +\infty} A^* \text{ o bien } \xi_{z_0}(t) \xrightarrow{t \to +\infty} A.$$

En el primer caso, $1 = \lim\limits_{t\to+\infty} L(T(t)z_0) \leq K(z_0) \leq 1$ y así $K(z_0) = 1$. Por otro lado, si $0 < \varepsilon < 1$, la continuidad de L genera V, una vecindad abierta de A^* en X con $L(V) \subset (1-\varepsilon, 1] = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap [0,1]$. En este contexto, si $t_0 > 0$ satisface $T(t_0)z_0 \in V$, la continuidad de $T(t_0)$ induce una vecindad abierta U de z_0 tal que $T(t_0)U \subset V$. En esta vecindad, sus elementos $z \in U$ satisfacen $T(t_0)z \in V$ y así $1-\varepsilon < L\big(T(t_0)z\big)$. Por otro lado, las desigualdades $L\big(T(t_0)z\big) \leq \sup\limits_{t\geq 0} L\big(T(t)z\big) = K(z)$ muestran que $K(z) > 1-\varepsilon$ para todo $z \in U$. Consecuentemente, la vecindad U de z_0 cumple $K(U) \subset (1-\varepsilon, 1]$ (con $K(z_0) = 1$). Por lo tanto, la afirmación se cumple cuando $\lim\limits_{t\to+\infty} d(T(t)z_0, A^*) = 0$.

En el segundo caso, $0 = \lim\limits_{t\to+\infty} L\big(T(t)z_0\big)$ y $0 < L(z_0) < 1$. La continuidad de L genera una constante $\delta > 0$ para la cual

$$L(\mathcal{O}_\delta(A)) \subset \Big(\frac{-L(z_0)}{2}, \frac{L(z_0)}{2}\Big) \cap [0,1] = \Big[0, \frac{L(z_0)}{2}\Big) \tag{3.8}$$

El lema 2.2.5 induce una constante $\delta' \in (0, \delta)$ de modo que

$$\gamma^+\big(\mathcal{O}_{\delta'}(A)\big) \subset \mathcal{O}_\delta(A). \tag{3.9}$$

Así, existe $t_0 > 0$ para lo cual $T(t_0)z_0 \in \mathcal{O}_{\delta'}(A)$ y $T(t)z_0 \in \mathcal{O}_\delta(A), \forall t \geq t_0$. Por la continuidad de $T(t_0)$, existe una vecindad abierta U_1 de z_0 en X tal que la imagen $T(t_0)U_1 \subset \mathcal{O}_{\delta'}(A)$. Por (3.9), se cumple

$$z \in U_1 \Rightarrow T(t)z \in \mathcal{O}_\delta(A), \forall t \geq t_0$$

y se entiende el comportamiento de la órbita positiva de $T(t)U_1$ siempre que $t \geq t_0$. Además, (3.8) implica $\sup\limits_{t\geq t_0} L\big(T(t)z\big) \leq \dfrac{L(z_0)}{2}, \forall z \in U_1$. Finalmente, la continuidad de L genera una vecindad abierta U_2 de z_0 en X donde $L(z) > \frac{L(z_0)}{2}, \forall z \in U_2$. En este contexto, para la intersección $U := U_1 \cap U_2$ cada elemento $z \in U$ satisface $\sup\limits_{t\geq t_0} L\big(T(t)z\big) \leq \dfrac{L(z_0)}{2}$ y $L(z) > \frac{L(z_0)}{2}$. Es decir, $L\big(T(t)z\big) \leq \frac{L(z_0)}{2} < \frac{1}{2}$ para todo $t \geq t_0$ y $L(T(t)z) > \frac{L(z_0)}{2}$ cuando $0 \leq t \leq t_0$ pues la imagen del complemento $L(X\backslash(A \cup A^*))$ es parte del intervalo abierto $(0,1)$. De aquí resulta que

$$K(z) = \sup_{0\leq t\leq t_0} L(T(t)z), \quad \forall z \in U.$$

Por la compacidad de $[0,t_0]$ existe $s_z \in [0,t_0]$ tal que $K(z) = L(T(s_z)z)$ y existe $s_0 \in [0,t_0]$ tal que $s_0 = \lim\limits_{z\to z_0} s_z$, en este contexto

$$\lim_{z\to z_0} K(z) = \lim_{z\to z_0} L(T(s_z)z) = L(T(s_0)z_0) \leq \sup_{0\leq t\leq t_0} L(T(t)z_0) = K(z_0).$$

Por otro lado, existe $t' \in [0,t_0]$ tal que $K(z_0) = L(T(t')z_0)$; desde que $L(T(t')z) \leq K(z), \forall z \in U$, la continuidad de $T(t')$ implica que

$$K(z_0) = L(T(t')z_0) = \lim_{z\to z_0} L(T(t')z) \leq \lim_{z\to z_0} K(z).$$

Esto genera la continuidad de K en z_0 si $\lim\limits_{t\to+\infty} d(T(t)z_0, A) = 0$. Por lo tanto, la afirmación se cumple cuando $z_0 \notin \mathcal{A}$.

$\underline{z_0 \in \mathcal{A}}$: La solución global ξ_{z_0} es acotada y $\overline{\xi_{z_0}(\mathbb{R})}$ es parte del atractor global y por la parte (a) en la proposición 2.2.8, se obtiene $\xi_{z_0}(t) \xrightarrow{t\to+\infty} A$. La prueba del segundo caso en la página 106, demuestra la afirmación cuando $z_0 \in \mathcal{A}$.

La afirmación de la página 105, (3.6) y (3.7) demuestran el lema. □

El siguiente lema es útil para simplificar la construcción de la función de Lyapunov.

Lema 3.1.7. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$, con $A \neq \emptyset$, entonces*

(a) $K\colon X \to [0,1]$ *es decreciente a lo largo de las soluciones.*

(b) $K^{-1}(0) = A$ *y* $K^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$.

(c) Si $z \in \mathcal{A}$ *y* $K(T(t)z) = K(z), \ \forall\, t \geq 0$ *entonces* $z \in A \cup A^*$.

donde K es la función definida en el lema 3.1.6

Demostración. En (a), se observa que por cada elemento $z \in X$, la función $t \mapsto K(T(t)z)$ es decreciente, pues para $0 \leq t_1 \leq t_2$:

$$\begin{aligned} K(T(t_1)z) &= \sup_{t\geq 0} L(T(t)T(t_1)z) = \sup_{t\geq 0} L(T(t+t_1)z) = \sup_{t\geq t_1} L(T(t)z) \\ &\geq \sup_{t\geq t_2} L(T(t)z) = \sup_{t\geq 0} L(T(t+t_2)z) = K(T(t_2)z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ítem (a) es verdadero.

En (b), cada elemento $z \in A$ satisface $T(t)z \in A, \forall t \geq 0$ y así $K(z) = 0$; en otras palabras, $A \subset K^{-1}(0)$. Recíprocamente, cuando $z \in K^{-1}(0)$, la definición de K implica que $L\big(T(t)z\big) = 0, \forall t \geq 0$, en particular $L\big(T(0)z\big) = L(z) = 0$ muestra que $z \in A$, y se obtiene $K^{-1}(0) \subset A$. Por lo tanto,

$$K^{-1}(0) = A. \tag{3.10}$$

Para probar que $K^{-1}(1) \cap \mathcal{A} \subset A^*$, se procede por el absurdo y se admite algún $z \in \mathcal{A}$ con $K(z) = 1$ y $z \notin A^*$. Por (2.15), el invariante aislado $A \supset \omega(z)$ y por (3.10), tal $z \notin A$. Por la proposición 2.2.8, $d(T(t)z, A) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$; luego, $\lim\limits_{t\to+\infty} L(T(t)z) = 0$. La prueba del segundo caso en la página 106 existe una vecindad U de $z_0 \in \mathcal{A} \setminus (A \cup A^*)$ y una constante $t_0 > 0$ de modo que $K(z) = \sup\limits_{0\leq t\leq t_0} L\big(T(t)z\big), \forall z \in U$. Por la compacidad de $[0, t_0]$, existe $t' \in [0, t_0]$ tal que $K(z) = L\big(T(t')z\big) = 1$. Luego $T(t')z \in A^*$, y $\omega(z) = \omega(T(t')z) \subset A^*$. Esta contradicción con $\omega(z) \subset A$ implica $K^{-1}(1) \cap \mathcal{A} \subset A^*$. Recíprocamente, $A^* \subset K^{-1}(1)$ pues cada $z \in A^*$ satisface $L(T(t)z) = 1, \forall t \geq 0$, luego $z \in K^{-1}(1)$ y $A^* \subset K^{-1}(1) \cap \mathcal{A}$. Por tanto,

$$K^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^* \text{ y se demuestra (b).}$$

En (c), se procede por el absurdo. Sea $z \in \mathcal{A}$ con $K(T(t)z) = K(z), \forall t \geq 0$ y $z \notin A \cup A^*$. Existe una solución global acotada ξ_z y la proposición 2.2.8 implica $d(T(t)z, A) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, luego $\omega(z) \subset A$. Por otro lado, $K(T(t)z) = K(z)$ implica

$$\begin{aligned} K(z) &= \lim_{t\to+\infty} K(T(t)z) \\ &= \lim_{t\to+\infty} \sup_{r\geq 0} \left[\frac{d(T(r)T(t)z, A)}{d(T(r)T(t)z, A) + d(T(r)T(t)z, A^*)} \right] = 0, \end{aligned}$$

y así $z \in K^{-1}(0) = A$. Esta contradicción demuestra (c). $\square$

La siguiente proposición es una de las más importantes para construir la función de Lyapunov. Se utilizan las propiedades de las funciones K y h, ya definidas.

Proposición 3.1.8. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$. Si (A, A^*) es un par atractor-repulsor para $T(\cdot)$, con $A \neq \emptyset$ entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:*

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ es decreciente a lo largo de las soluciones.

(b) $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$.

(c) Si $z \in X$ y $f(T(t)z) = f(z)$, $\forall\, t \geq 0$ entonces $z \in A \cup A^*$.

Demostración. Sea $h \colon X \to \mathbb{R}$, la función del lema 3.1.4 y sea $K : X \to \mathbb{R}$, como en el lema 3.1.6. Se define $f : X \to \mathbb{R}$ por la igualdad

$$f(z) = K(z) + h(z)$$

y se obtiene una función continua que es decreciente a lo largo de las soluciones, pues son propiedades que se heredan de K y h. Se cumple el ítem (a).

En (b), cada $z \in A$ satisface $f(z) = K(z) + h(z) = 0$ y así $A \subset f^{-1}(0)$. Para la otra inclusión, se nota que cada $z \in f^{-1}(0)$ satisface $h(z) = K(z) = 0$ y por eso $z \in A$. En otras palabras, $f^{-1}(0) \subset A$ y se concluye que se verifica la igualdad.

$$f^{-1}(0) = A.$$

Para la segunda parte, basta observar que $f(z) = K(z)$ para todo $z \in \mathcal{A}$ (el atractor global) es decir $f|_{\mathcal{A}} = K|_{\mathcal{A}}$ y $f^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = K^{-1}(1) \cap \mathcal{A} = A^*$. Por lo tanto, se cumple (b).

En (c), si $z \in \mathcal{A}$, el lema 3.1.4 y la invarianza del atractor global muestran que $f\big(T(t)z\big) = K\big(T(t)z\big) = K(z), \forall t \geq 0$ y por el lema 3.1.6, $z \in A \cup A^*$. Por tanto, se obtiene (c) si $z \in \mathcal{A}$. Para concluir, se procede por contradicción y se asume:

$$\text{Existe } z_0 \notin \mathcal{A} \text{ tal que } f(z_0) = f\big(T(t)z_0\big), \forall t \geq 0. \tag{3.11}$$

La proposición 2.2.8 implica $\xi_{z_0}^+(t) \xrightarrow{t \to +\infty} A^* \cup A$. Se presentan dos casos, cada uno de los cuales genera una contradicción.

En el primer caso, $\lim_{t\to+\infty} d(T(t)z_0, A) = 0$. La continuidad h y K implican fácilmente que $\lim_{t\to+\infty} K(T(t)z_0) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} h(T(t)z_0) = 0$. De (3.11), se obtiene que

$$f(z_0) = \lim_{t\to+\infty} f(T(t)z_0) = \lim_{t\to+\infty} K(T(t)z_0) + \lim_{t\to+\infty} h(T(t)z_0) = 0.$$

En consecuencia, $z_0 \in f^{-1}(0) = A \subset \mathcal{A}$. Una contradicción con $z_0 \in X\backslash\mathcal{A}$.

Segundo caso, $\lim_{t\to+\infty} d(T(t)z_0, A^*) = 0$. En este caso, también se obtiene $\lim_{t\to+\infty} K(T(t)z_0) = 1$ y $\lim_{t\to+\infty} h(T(t)z_0) = 0$ y se concluye que

$$f(z_0) = \lim_{t\to+\infty} f(T(t)z_0) = \lim_{t\to+\infty} K(T(t)z_0) + \lim_{t\to+\infty} h(T(t)z_0) = 1$$

Es decir, $1 = \lim_{t\to+\infty} K(T(t)z_0) \leq K(z_0) \leq 1$ y por eso se tiene que $h(z_0) = 0$ es decir $z_0 \in \mathcal{A}$. Una contradicción con $z_0 \in X\backslash\mathcal{A}$. Se cumple (c). Por lo tanto, se cumple la proposición. $\square$

3.2 Resultados Principales

En esta sección se presenta los dos resultados principales de la tesis. El primero es la equivalencia entre los semigrupos gradiente y tipo-gradiente. El segundo es la construcción de la función de Lyapunov.

3.2.1 Equivalencia entre los semigrupos gradiente y tipo–gradiente

Para el caso de espacios compactos los autores de [28, 27] extienden las técnicas presentadas por Conley y demuestran que la descomposición de Morse implica la existencia de una función de Lyapunov. En la proposición 3.2.1 se presenta un resultado similar pero sin restricciones en el espacio; las técnicas depende intrínsecamente de la dinámica y no se usa la demostración de Conley [14]. Se concluye presentando el primer teorema principal que es la equivalencia en los sistemas gradientes[1] (teorema 3.2.2).

[1] Un interesante generalización aparece en [6]

Proposición 3.2.1. *Si $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente con respecto a $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, entonces existe una función de Lyapunov $V\colon X \to \mathbb{R}$ como en la definición 3.1.1 de tal forma que $V(E_k) = k-1$ para $1 \le k \le n$.*

Demostración. Por la proposición 2.3.7 se asume que $\mathcal{S}$ es una descomposición de Morse de $\mathcal{A}$. Por el teorema 2.3.8, los conjuntos $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(E_i)$ con $1 \le k \le n$ son atractores locales que satisfacen $A_0 = \emptyset \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = \mathcal{A}$ y los respectivos repulsores no solo cumplen $E_j = A_j \cap A_{j-1}^*$, sino también

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j.$$

A partir de esto, se consideran $K_j : X \to \mathbb{R}$ las funciones continuas asociadas a cada par atractor-repulsor (A_j, A_j^*) del lema 3.1.6, esto es

$$K_j(z) = \sup_{t \ge 0} \left[\frac{d\big(T(t)z, A_j\big)}{d\big(T(t)z, A_j\big) + d\big(T(t)z, A_j^*\big)} \right], \quad \forall 1 \le j \le n,$$

y se define

$$V(z) = h(z) + \sum_{j=0}^{n} K_j(z),$$

donde h es la función continua del lema 3.1.4 y convenientemente se escribe $K_0(z) = \sup_{t \ge 0} \left[\dfrac{d\big(T(t)z, \emptyset\big)}{d\big(T(t)z, \emptyset\big) + d\big(T(t)z, \mathcal{A}\big)} \right] = 0.$

Afirmación. *$V\colon X \to \mathbb{R}$ es una función de Lyapunov generalizada con respecto a $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ y $V(E_k) = k-1$ para todo $1 \le k \le n$.*

La continuidad de V se hereda de las funciones que la definen. Análogamente, desde de que h y K_j son decrecientes a lo largo de las soluciones se obtiene que

$$[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R} \text{ es decreciente}, \forall x \in X.$$

Por otro lado, si $z \in E_k = A_k \cap A_{k-1}^*$ entonces $z \in A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$ y $z \in A_{k-1}^* \subset A_{k-2}^* \subset \cdots \subset A_1^* \subset A_0^* = \mathcal{A}$. En consecuencia $h(z) = 0,\ K_j(z) = 1,$ si $1 \le j \le k-1$ y $K_j(z) = 0,$ si $k \le j \le n$. Es decir,

$$V(z) = \sum_{j=0}^{n} K_j(z) = \sum_{j=0}^{k-1} k_j(z) + \sum_{j=k}^{n} K_j(z) = \sum_{j=0}^{k-1} 1 + \sum_{j=k}^{n} 0 = k-1.$$

Por lo tanto,

$$V(E_k) = k - 1, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Para concluir con la afirmación se probará la última condición de la definición 3.1.1 esto es, para cada $z \in X$,

$$\Big(V(T(t)z) = V(z), \ \forall t \geq 0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \bigcup_{j=1}^{n} E_j. \tag{3.12}$$

Para la prueba de la suficiencia se consideran las funciones h y K_j las cuales son decrecientes a lo largo de las soluciones de $T(\cdot)$ es decir se cumplen las desigualdades $h(T(t)z) \leq h(z)$ $\forall t \geq 0$ y $K_j(T(t)z) \leq K_j(z), \forall t \geq 0$ cuando $0 \leq j \leq n$. Si se asume que existe $t > 0$ con $h(T(t)z) < h(z)$ (respectivamente $K_j(T(t)z) < K_j(z)$ para algún $0 < j \leq n$) al sumar a cada lado de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} K_j(T(t)z) \leq \sum_{j=0}^{n} K_j(z)$ (respectivamente $\displaystyle h(T(t)z) + \sum_{i=0,\, i\neq j}^{n} K_i(T(t)z) \leq h(z) + \sum_{i=0,\, i\neq j}^{n} K_i(z)$) se obtiene $V(T(t)z) < V(z)$, lo cual genera una contradicción con la hipótesis de (3.12). Por lo tanto, $h(T(t)z) = h(z), \forall t \geq 0$ (respectivamente $K_j(T(t)z) = K_j(z)$, $\forall t \geq 0$ cuando $0 \leq j \leq n$). En otras palabras, cada $f_j = K_j + h$ satisface

$$f_j(T(t)z) = f_j(z), \quad \forall t \geq 0.$$

Consecuentemente, la parte (c) de la proposición 3.1.8 implica que $z \in (A_j \cup A_j^*)$ cuando $0 \leq j \leq n$. Es decir, se concluye:

$$z \in \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} E_j.$$

Para la prueba de la necesidad se acepta que $z \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} E_j = \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*)$. Luego para cada $0 \leq j \leq n$ se obtiene que $z \in A_j \cup A_j^*$.

En el primer caso: $z \in A_j$ se cumple que $T(t)z \in A_j \subset \mathcal{A}, \forall t \geq 0$ y así $d(T(t)z, A_j) = 0$, $d(T(t)z, A_j^*) > 0$ y $h(T(t)z) = 0$ cuando $t \geq 0$. En otras palabras, no solo cada $K_j(T(t)z) = 0, \forall t \geq 0$ sino también la función $V(T(t)z) = h(T(t)z) + \sum_{j=0}^{n} K_j(T(t)z) = 0, \forall t \geq 0$. En particular,

$$V(T(t)z) = V(z) = 0, \forall t \geq 0.$$

Análogamente, en el segundo caso: $z \in A_j^*$, cada $K_j(T(t)z) = 1, \forall t \geq 0$ y también $h(T(t)z) = 0$, $\forall t \geq 0$. Es decir,

$$V(T(t)z) = V(z) = n, \forall t \geq 0.$$

Y esto concluye la validez de (3.12). Por lo tanto, se cumple la proposición. □

Para los semigrupos que admiten un atractor global, ser dinámicamente gradiente con respecto a una familia aislada es equivalente a poseer una función de Lyapunov generalizada.

Teorema 3.2.2. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Son equivalentes:*

(1) $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente con respecto a $\mathcal{S}$.

(2) $T(\cdot)$ es $\mathcal{S}-$dinámicamente gradiente.

Demostración. Se obtiene directamente de las proposiciones 3.1.2 y 3.2.1. □

Ejemplo 3.2.3. *Del resultado del ejemplo 2.3.5, se concluye que $T(\cdot)$ es un semigrupo gradiente respecto a la familia invariante aislada $\mathcal{S} = \{E_1, E_2, E_3\}$, dada en el ejemplo 2.2.15.*

Ejemplo 3.2.4 (de [1]). *Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisface $\displaystyle\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{f(u)}{u} < 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio limitado con frontera suave, para $p > n$ se cumple que la siguiente ecuación de reacción-difusión con condiciones de frontera tipo Neumann*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) \quad x \in \Omega \quad t \geq 0; \\ \partial_n u(x,t) = 0 \quad x \in \Omega \quad t \geq 0; \\ u(\cdot, 0) = u_0 \quad \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{3.13}$$

induce un semigrupo dinámicamente gradiente en $W^{1,p}(\Omega)$ si cada equilibrio es hiperbólico. El teorema 3.2.2 implica que (3.13) admite una función de Lyapunov $V : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, continua, decreciente a lo largo de las soluciones y constante en cada conjunto invariante de la descomposición de Morse (vea [3]).

3.2.2 Construcción de una función de Lyapunov, con regularidad

Finalmente, se presenta el segundo teorema principal de la tesis en la cual se construye una función de Lyapunov que además de poseer la propiedad mencionada en la proposición 3.2.1 es diferenciable y estrictamente decreciente a lo largo de las soluciones que no se originan en los conjuntos invariantes aislados (teorema 3.2.6).

Lema 3.2.5. *Sea $T(\cdot)$, un semigrupo que admite un atractor global $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, una familia invariante aislada. Si V es una función de Lyapunov generalizada de $T(\cdot)$, con respecto a $\mathcal{S}$ entonces la función $W : X \to \mathbb{R}$*

$$W(z) = \int_0^\infty e^{-t} V(T(t)z)dt$$

está bien definida y también satisface la definición 3.1.1.

Demostración. Por cada $z \in X$ se cumple $V(T(t)z) \leq V(z), \forall t \geq 0$ y por ello

$$W(z) = \int_0^\infty e^{-t} V(T(t)z)dt \leq \int_0^\infty e^{-t} V(z)dt = V(z) \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in X. \tag{3.14}$$

Si $\{z_1, z_2\} \subset X$, la diferencia $W(z_1) - W(z_2) = \int_0^\infty e^{-t}\big[V(T(t)z_1) - V(T(t)z_2)\big]dt$ está formada por integrales convergentes. En particular, cuando $z_1 = z_2$ se cumple $W(z_1) = W(z_2)$ y se concluye que W está bien definida.

Afirmación 1. W es continua en cada $z_0 \in X$.

Por la continuidad de V en z_0, cada $\varepsilon > 0$ induce una constante positiva $\delta_0 = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ de modo que la imagen $V\big(\mathcal{O}_{\delta_0}(z_0)\big)$ es parte del intervalo $(V(z_0) - \varepsilon, V(z_0) + \varepsilon)$. En este contexto, no solo existe el supremo $M_{\delta_0} := \sup\{V(T(t)z) : z \in \mathcal{O}_{\delta_0}(z_0),\ t \geq 0\}$, sino también una constante $t_0 = t(z_0, \delta_0) > ln(\frac{4}{\varepsilon}(M_{\delta_0} + 1))$ para la cual se cumple

$$\int_{t_0}^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{e^{t_0}} < \frac{\varepsilon}{4(M_{\delta_0} + 1)}. \tag{3.15}$$

Por otro lado, la continuidad de $[0,\infty)\times X \ni (t,x) \mapsto V(T(t)x) \in [0,\infty)$ y la compacidad de $[0,t_0]$ garantizan la existencia de una constante positiva $0<\delta<\delta_0$ de modo que $d(z,z_0)<\delta$ implica $|V(T(t)z)-V(T(t)z_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ y así

$$\int_0^{t_0} e^{-t}\big|V(T(t)z)-V(T(t)z_0)\big|dt < \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{t_0} e^{-t}dt = \frac{\varepsilon}{2}(1-e^{-t_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.16}$$

Además cuando $d(z,z_0)<\delta$ se tiene

$$|V(T(t)z)-V(T(t)z_0)| \le |V(T(t)z)| + |V(T(t)z_0)| \le 2M_{\delta_0}. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, de (3.16), (3.17) y (3.15) sigue:

$$\begin{aligned} |W(z)-W(z_0)| &= \Big|\int_0^\infty e^{-t}[V(T(t)z)-V(T(t)z_0)]ds\Big| \\ &\le \Big|\int_0^{t_0} e^{-t}[V(T(t)z)-V(T(t)z_0)]ds\Big| \\ &+ \int_{t_0}^\infty e^{-t}\Big|V(T(t)z)-V(T(t)z_0)\Big|ds \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2M_{\delta_0}\Big|\int_{t_0}^\infty e^{-t}dt\Big| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra la afirmación 1.

Afirmación 2**.** Por cada $z\in X$, la función $[0,\infty)\ni t\mapsto W(T(t)z)\in\mathbb{R}$ es decreciente.

Como V es decreciente a lo largo de las soluciones de $T(\cdot)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} W(T(t)z) &= \int_0^\infty e^{-s}V(T(s+t)z)ds \\ &\le \int_0^\infty e^{-s}V(T(s)z)ds = W(z), \quad \forall t\ge 0. \end{aligned}$$

Entonces $W(T(t)z)\le W(z), \forall t\ge 0$. Esto muestra la afirmación 2.

Afirmación 3**.** W es constante en E_i para cada $1\le i\le n$

Si $z\in E_i$, la invarianza del conjunto muestra que $T(t)z\in E_i, \forall t\ge 0$. Como V es una función de Lyapunov entonces $V(T(t)z)=C$ para $t\ge 0$ (C es constante) luego

$$W(z) = \int_0^\infty e^{-t}V(T(t)z)dt = C.$$

Esto muestra la afirmación 3.

Afirmación 4. $W(T(t)z) = W(z)$, para todo $t \geq 0$ si y sólo si $z \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

Cuando $z \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, existe algún $1 \leq j \leq n$ donde $T(t)z \in E_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ para todo $t \geq 0$. Luego, la función de Lyapunov V satisface $V(T(t)z) = C, \forall t \geq 0$ y así

$$W(T(t)z) = \int_0^\infty e^{-s} V(T(s)T(t)z)ds = \int_0^\infty e^{-s} V(T(s+t)z)ds = C, \forall t \geq 0.$$

Por lo tanto, $W(T(t)z) = W(z)$ para todo $t \geq 0$. Recíprocamente, si $z \in X$ satisface $W(T(t)z) = W(z)$ entonces se obtiene

$$0 = W(T(t)z) - W(z) = \int_0^\infty e^{-s}[V(T(s+t)z) - V(T(s)z)]ds. \tag{3.18}$$

Como V es decreciente a lo largo de las soluciones, se tiene $V(T(s+t)z) - V(T(s)z) \leq 0$. (Si se supone que $V(T(s+t)z) - V(T(s)z) < 0$ entonces $W(T(t)z) - W(z) < 0$, lo cual es una contradicción con (3.18)). Por lo tanto $V(T(s+t)z) = V(T(s)z)$ para todo $s \geq 0$. En particular, para $s = 0$ se obtiene $V(T(t)z) = V(z), \forall t \geq 0$ con V una función de Lyapunov, consecuentemente $z \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Esto muestra la afirmación 4.
Por lo tanto se cumple el lema. $\square$

El siguiente es uno de los más importantes de la tesis.

Teorema 3.2.6. *Si $T(\cdot)$ es dinámicamente gradiente con respecto a $\mathcal{S} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ entonces no solo existe una función de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$ con $V(E_k) = k - 1$ para $1 \leq k \leq n$ sino también $W : X \to \mathbb{R}$:*

$$W(z) = \int_0^\infty e^{-t} V(T(t)z)dt,$$

satisface la definición 3.1.1. Además,

(a) $[0, \infty) \ni t \mapsto W(T(t)z)$ es estrictamente decreciente para $z \notin \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

(b) $[0, \infty) \ni t \mapsto W(T(t)z)$ es diferenciable para todo $z \in X$.

Demostración. Por el lema 3.2.5, W satisface la definición 3.1.1. Para probar (a) se considera $z \notin \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ y $t > 0$. Como V es decreciente a lo largo de las soluciones:

$$W(T(t)z) - W(z) = \int_0^\infty e^{-s}[V(T(s+t)z) - V(T(s)z)]ds \leq 0.$$

Si $W(T(\tilde{t})z) - W(z) = 0$ para algún $\tilde{t} > 0$, $V(T(s+\tilde{t})z) - V(T(s)z) = 0, \forall s \geq 0$. En particular cuando $s = 0$, se tiene $V(T(\tilde{t})z) = V(z)$. Por otro lado, desde que V es una función de Lyapunov se cumple $V(T(\tilde{t})z) \leq V(T(s)z) \leq V(z)$, cuando $0 \leq s \leq \tilde{t}$, en consecuencia $V(T(s)z) = V(z)$ cuando $s \in [0, \tilde{t}]$. Si $W(T(\tau)z) - W(z) = 0$ para algún $\tau > \tilde{t}$, $V(T(s+\tau)z) = V(T(s)z), \forall s \geq 0$. Para $\tilde{t} \leq s \leq \tau$, se tiene $V(T(\tau)z) \leq V(T(s)z) \leq V(T(\tilde{t})z)$, de aquí se desprende $V(T(s)z) = V(z)$, para todo $s \in [\tilde{t}, \tau]$. Repitiendo este razonamiento con $\tilde{t} > 0$ se concluye que $V(T(s)z) = V(z), \forall s \geq 0$. Esto contradice la elección de z. Por lo tanto, $W(T(t)z) < W(z)$ para todo $t > 0$. Se cumple (a).

Para probar (b) se considera $z \in X$, $t \geq 0$ y $h \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\frac{W(T(t+h)z) - W(T(t)z)}{h}$$

es igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big[\int_0^\infty e^{-s}V(T(s+t+h)z)ds - \int_0^\infty e^{-s}V(T(s+t)z)ds\Big] \\
&= \frac{1}{h}\Big[\int_{t+h}^\infty e^{-s+t+h}V(T(s)z)ds - \int_t^\infty e^{-s+t}V(T(s)z)ds\Big] \\
&= \frac{1}{h}\Big[e^{t+h}\int_{t+h}^\infty e^{-s}V(T(s)z)ds - e^t\int_t^\infty e^{-s}V(T(s)z)ds\Big] \\
&= \frac{1}{h}\Big\{e^{t+h}\int_{t+h}^\infty e^{-s}V(T(s)z)ds - e^t\Big[\int_t^{t+h} e^{-s}V(T(s)z)ds + \int_{t+h}^\infty e^{-s}V(T(s)z)ds\Big]\Big\} \\
&= \frac{e^t}{h}\Big\{(e^h - 1)\int_{t+h}^\infty e^{-s}V(T(s)z)ds - \int_t^{t+h} e^{-s}V(T(s)z)ds\Big\}.
\end{aligned}$$

Cuando $h \to 0$, el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{W(T(t+h)z) - W(T(t)z)}{h}$$

es igual a

$$\begin{aligned}
&e^t \lim_{h\to 0} \frac{(e^h-1)}{h} \int_{t+h}^{\infty} e^{-s} V(T(s)z)ds - e^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-s} V(T(s)z)ds \\
&= e^t \int_t^{\infty} e^{-s} V(T(s)z)ds - e^t \lim_{h\to 0} e^{-(t+h)} V(T(t+h)z) \\
&= e^t \int_t^{\infty} e^{-s} V(T(s)z)ds - V(T(t)z) \\
&= e^t \int_0^{\infty} e^{-(s+t)} V(T(s+t)z)ds - V(T(t)z) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-s} V(T(s)T(t)z)ds - V(T(t)z) \\
&= W(T(t)z) - V(T(t)z) \le 0.
\end{aligned}$$

(Vea (3.14)). Por lo tanto, se cumple el teorema. $\square$

Conclusiones

En este trabajo de tesis se estableció las equivalencias entre:

1. La descomposición de Morse que se presenta en la definición 1.4.7 y la que se presenta en [1, definición 2.10].

2. Los conceptos de atractor local débil el cuál se encuentra dentro de un conjunto compacto invariante y el de atractor local que se encuentra dentro del atractor global (vea proposición 2.2.9).

3. Los semigrupos gradientes y los de tipo-gradiente para lo cuál se utilizó la teoría de Morse cumpliendo así con uno de los objetivos de la tesis (vea teorema 3.2.2).

Además de estas equivalencias, se presentó la construcción de una función de Lyapunov generalizada con dos propiedades adicionales las cuales son: decreciente y diferenciable a lo largo de las soluciones, cumpliendo así con el otro objetivo de la tesis (vea teorema 3.2.6).

Bibliografía

[1] ARAGÃO COSTA, E. R; CARABALLO. T; CARVALHO, A. N. & LANGA, J. A. (2011). Stability of gradient semigroups under perturbations, *Nonlinearity* **24** (7); 2099 – 2117. MR 2805595

[2] ARAÚJO V. & PACIFICO, M. J. (2010). *Three-dimensional flows*. Volume **53** of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. **3**. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer, Heidelberg. With a foreword by Marcelo Viana. MR 2662317

[3] ARRIETA, J. M; CARVALHO, A. N & LOZADA-CRUZ,G. (2006). Dynamics in dumbbell domains. I. Continuity of the set of equilibria. *J. Differential Equations* **231** (2); 551 – 597. MR 2287897 (2007m:35136)

[4] BABIN, A. V. & VISHIK,M. I. (1982). Existence and estimates of the dimensions of attractors of quasilinear parabolic equations and of the Navier-Stokes system. *Uspekhi Mat. Nauk* **37** no. 3 (225); 173 – 174. MR 659432

[5] ______. (1992). *Attractors of evolution equations*. Volume **25** of Studies in Mathematics and its Applications. North–Holland Publishing Co., Amsterdam. Translated and revised from the 1989 Russian original by Babin. MR 1156492

[6] CARABALLO, T; JARA-PEREZ, J. V; LANGA, J. A. & VALERO, J. (2015). Morse decomposition of global attractors with infinite components. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **35** (7); 2845 – 2861. MR 3343544

[7] CARVALHO, A. N. & LANGA, J. L. (2007). Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: continuity of local stable and unstable manifolds. *J. Differential Equations* **233** (2); 622 – 653. MR 2292521

[8] ______. (2009). An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation. *J. Differential Equations* **246** (7); 2646 – 2668. MR 2503016

[9] CARVALHO, A. N; LANGA, J. A. & ROBINSON, J. C. (2009). Lower semicontinuity of attractors for non-autonomous dynamical systems, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **29** (6); 1765 – 1780. MR 2563091

[10] ______. (2013). *Attractors for infinite dimensional non autonomous dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences. Volume **182**, Springer, New York. MR 2976449

[11] CARVALHO, A. N; LANGA, J. A; ROBINSON, J. C. & SUÁREZ, A. (2007). Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system. *J. Differential Equations* **236** (2) 570 – 603. MR 2322025

[12] CHOLEWA, J. W. & DLOTKO, T. (2000). *Global attractors in abstract parabolic problems.* Volume **278** of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge. MR 1778284

[13] CIMA, A; VAN DEN ESSEN, A; GASULL, A; HUBBERS, E. & MAÑOSAS, F. (1997). A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe conjecture. *Adv. Math.* **131** 453 – 457.

[14] CONLEY, C. (1978). *Isolated invariant sets and the Morse index.* Volume **38** of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I. MR 511133

[15] FOLLAND, G. B. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, second ed. Modern techniques and their applications. A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462

[16] RIVERO-GARVÍA L. F. (2007). *Atractores globales: teoría y resultados para sistemas dinámicos autónomos y no autónomos.* Tesis de maestría. Universidad Complutense de Madrid (Fac. de Mat.).

[17] HALE, J. K. (1988). *Asymptotic behavior of dissipative systems.* Volume **25** of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI. MR 941371

[18] ———. (2004). Stability and gradient dynamical systems. *Rev. Mat. Complut.* **17** (1) 7 – 57. MR 2063940

[19] ———. (2006). Dissipation and compact attractors. *J. Dynam. Differential Equations.* **18** (3) 485 – 523. MR 2264036

[20] HALE, J. K: MAGALHÃES, L. T. & OLIVA, W. M. (2002). *Dynamics in infinite dimensions.* Volume **47** of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, second ed. With an appendix by Krzysztof P. Rybakowski. MR 1914080

[21] HIRSCH, M. W; PUGH, C. C. & SHUB, M. (1977). *Invariant manifolds.* Lecture Notes in Mathematics. **583**. Springer-Verlag, Berlin-New York. MR 0501173

[22] HIRSCH, M. W. & SMALE, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* Volume **60** of Pure and Applied Mathematics. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London. MR 0486784

[23] LADYZHENSKAYA, O. (1991). *Attractors for semigroups and evolution equations.* Lezioni Lincee. [Lincei Lectures], Cambridge University Press, Cambridge. MR 1133627

[24] MARÍN-GAYTE, I. (2016). *Dinámida global de sistemas mutualistas.* Tesis, Universidad de Sevilla (Fac. de Mat.).

[25] MUNKRES, J. R. (2000). *Topology.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. Second edition. MR 3728284

[26] NORTON, D. E. (1995). The fundamental theorem of dynamical systems. *Comment. Math. Univ. Carolin.* **36** (3) 585 – 597. MR 1364499

[27] PATRÃO, M. (2007). Morse decomposition of semiflows on topological spaces. *J. Dynam. Differential Equations* **19** (1) 181 – 198. MR 2279951

[28] PATRÃO, M. & SAN MARTIN, L. A. B. (2007). Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups. *J. Dynam. Differential Equations* **19** (1) 155 – 180. MR 2279950

[29] PAZY, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Volume **44** of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York. MR 710486

[30] JARA-PEREZ, J. C. (2013). *Caracterización de los atractores en sistemas dinámicos no autónomos.* Tesis de doctorado, Universidad de Sevilla (Fac. de Mat.).

[31] PERKO, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems.* Volume **7** of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, third ed. MR 1801796

[32] RAUGEL, G. (2002). Global attractors in partial differential equations. In *Handbook of dynamical systems*, Vol. 2, pages 885 – 982. North-Holland, Amsterdam. MR 1901068 (2003f:37151)

[33] ROBINSON, C. (1999). *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, second ed. Stability, symbolic dynamics, and chaos. MR 1792240

[34] ROBINSON, J. (2001). *Infinite-dimensional dynamical systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.

[35] RODRIGUES, H. M; TEIXEIRA, M. A. & GAMEIRO, M. (2018). On exponential decay and the Markus-Yamabe conjecture in infinite dimensions with applications to the Cima system. *J. Dynam. Differential Equations* **30** (3) 1199 – 1219. MR 3842146

[36] RYBAKOWSKI, K. P. (1987). *The homotopy index and partial differential equations*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin. MR 910097 (89d:58025)

[37] SANJURJO, J. M. R. (2012). On the fine structure of the global attractor of a uniformly persistent flow. *J. Differential Equations* **252** (9) 4886 – 4897. MR 2891350

[38] SELL, G. R. & YOU, Y. (2002). *Dynamics of evolutionary equations*. Volume **143** of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York. MR 1873467

[39] TEMAM, R. (1997). *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Volume **68** of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, second ed. MR 1441312

Índice alfabético